



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



PROJETO DE FOGUETE PARA LANÇAMENTO DE NANO SATÉLITES

Wagner Frederico Cesar Mahler

Relatório final de iniciação científica do programa de bolsas de iniciação científica, PIBIC, orientado pelo Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos.

INPE
São José dos Campos
2014

Eu acredito no possível. Acredito que, por menor que sejamos, e por mais insignificantes que venhamos a ser, podemos alcançar o entendimento do Universo. Você estava certa quando disse que se sentia pequena ao olhar para o céu. Somos muito, muito pequenos. Mas somos profundamente capazes de coisas muito, muito grandes.

Stephen W. Hawking

Eu me abstive de escrever uma outra tese, pensando comigo mesmo: não se importe, você vai provar que pode se tornar um grande cientista, mesmo sem o título de doutor.

Hermann Oberth

A Terra é o berço da humanidade, mas ninguém pode viver no berço para sempre!

Konstantin E. Tsiolkovsky

Deus tenha piedade de um homem de um sonho só.

Robert H. Goddard

O foguete trabalhou perfeitamente, exceto por ter pousado no planeta errado.

Wernher von Braun

AGRADECIMENTOS

BS”D, agradeço a D’us por capacitar-me todos os dias de minha vida.

Agradeço a minha mãe Heloiza por ensinar-me os verdadeiros valores da vida. Ensinar-me que existem bens maiores que o dinheiro, sendo estes a sabedoria e o conhecimento, pois dinheiro algum poderá comprá-los e ladrão algum poderá roubá-los. Ao meu pai William por todo incentivo moral e a minha irmã Anelise pelos conselhos em meio aos momentos difíceis.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos por toda orientação científica e pessoal. Além dele muitos outros professores foram fundamentais para o meu desenvolvimento e dentre todos não poderei deixar de citar o professor Ph.D. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza, o professor Dr. Waldemar de Castro Leite Filho, o professor Dr. Domingos Chorfi, professor Ms. Osvaldo Prado de Rezende.

Agradeço ao Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) e ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) por todo conhecimento transmitido durante as aulas e a iniciação científica, respectivamente.

Agradeço aos meus amigos Christopher Shneider Cerqueira, Alexandre Macedo de Oliveira, Adolfo Graciano Rosa, Eloy Martins de Oliveira Júnior, Alain Giacobini e Fábio Mota pelos momentos de discussão a respeito da modelagem físico–matemática e computacional de meu projeto. Por todo apoio direto a este trabalho.

Agradeço aos meus familiares e amigos por todo incentivo e apoio de forma geral.

RESUMO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática de um foguete de pequeno porte direcionado, inicialmente, a grupos que estudam e pesquisam as consequências advindas, tal como as características e propriedades, das descargas eletrostáticas por meio de trigagem. O comportamento da dinâmica do corpo é modelada por meio das equações do movimento translacional e rotacional do foguete sob um sistema com seis graus de liberdade. Para isso, considera-se as coordenadas não inerciais e inerciais representadas por meio de triedros dispostos no centro de massa do corpo e no referencial localizado na plataforma de lançamento. Desta forma, as forças e torques, inerentes ao comportamento do foguete em voo, são decompostos no triedro do corpo. A discussão é baseada em revisão bibliográfica, modelagem e simulação de um foguete de pequeno porte para o estudo de descargas elétricas por meio de raios trigados. Devido à complexidade desta modelagem, a análise da atitude e o comportamento aerodinâmico do foguete não são uma tarefa fácil. Este trabalho desenvolve uma simulação do foguete proposto utilizando três diferentes softwares de modelagem, discutindo individualmente suas importâncias e finalidades. Os resultados obtidos são representados graficamente, facilitando as análises necessárias para o desenvolvimento do foguete.

Esta modelagem inicial, baseada num foguete de trigagem, possibilita maior compreensão e apuramento da dinâmica, de maneira que esta torne-se cada vez mais avançada e direcionada a foguetes de lançamento de nano satélites.

ABSTRACT

This paper presents a discussion of a mathematical model of a small rocket used in research and development groups of electrostatic discharge consequences through triggered lightning, besides its characteristics and properties. The dynamic behavior of the body is modeled by the translational and rotational equations of the rocket with six degrees of freedom. So, it is considered non-inertial and inertial coordinates represented by trihedrons at the center of mass of the body and in the reference located on the launch pad. Thus, the inherent forces and torques of the rocket in flight are decomposed at the trihedrons of the body. The discussion is based on review of literature, modeling and simulation of a small rocket used in research and development of electrical discharges through triggered lightning. Due to the model complexity, the attitude and aerodynamics behavior analysis becomes a hard task. This paper develops a simulation of a rocket proposed using three different modeling softwares, discussing their individual issues. The results are represented graphically, facilitating necessary analysis for the rocket design.

This initial modeling, based in a sounding rocket, allows a better comprehension and refining of its dynamics, so that it should become more and more advanced toward rockets for launching nanosatellites.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 OBJETIVO DO TRABALHO.....	1
1.2 JUSTIFICATIVA.....	1
1.3 METODOLOGIA DE PESQUISA.....	2
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	2
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	4
2.1 HISTÓRICO.....	4
2.2 FOGUETE.....	7
2.2.1 DEFINIÇÃO.....	7
2.2.2 TIPOES DE FOGUETE.....	7
2.2.3 USO/FINALIDADE.....	8
2.2.4 MILITAR.....	9
2.2.5 INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA.....	10
2.2.6 VOO ESPACIAL.....	12
2.2.7 RESGATE.....	12
2.2.8 ENTRETENIMENTO E MISSILISMO.....	13
2.3 COMPONENTES.....	13
2.3.1 CONE DE NARIZ OU COIFA.....	15
2.3.2 <i>PAYLOAD</i> (CARGA útil).....	16
2.3.3 SISTEMA AVIÔNICO.....	16
2.3.4 FUSELAGEM.....	17
2.3.5 EMPENAS E ALETAS DE CONTROLE.....	17
2.3.6 PROPELENTES.....	18
2.3.7 SISTEMA PROPULSIVO (MOTORES).....	19
2.3.8 NOZZLES.....	21
2.4 METODOLOGIA.....	26
2.5 CONCEPÇÃO FÍSICO-MATEMÁTICA DO MOVIMENTO E DINÂMICA DE FORÇAS.....	28
2.5.1 SISTEMAS DO CORPO E ÂNGULOS DE EULER.....	34
2.5.2 FORÇA DE EMPUXO E TORQUES DE CONTROLE.....	39
2.5.3 FORÇA PESO E TORQUE DA FORÇA PESO.....	41
2.5.4 FORÇAS AERODINÂMICAS E TORQUES AERODINÂMICOS.....	44
2.5.5 AMORTECIMENTO AERODINÂMICO E AMORTECIMENTO DE JATO.....	50
2.5.6 ESTABILIDADE DE VOO.....	51
2.5.7 EQUACIONAMENTO DA DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO.....	52
2.6 PROPELENTES SÓLIDOS.....	58
3 METODOLOGIA.....	61
3.1 DADOS DE PROJETO.....	61
3.2 COIFA.....	61
3.3 FUSELAGEM LONGITUDINAL (Corpo).....	65
3.4 ALETAS.....	67
3.5 SIMULAÇÃO.....	69
4 RESULTADOS.....	70

4.1	COEFICIENTE DE ARRASTO.....	70
4.2	EMPUXO.....	75
4.3	VELOCIDADE.....	76
4.4	APOGEU.....	78
5	CONCLUSÃO.....	81
6	REFERÊNCIAS.....	84

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 – Modelos de mísseis projetados pelo programa espacial alemão.	5
Figura 2.2 – Comparação de tamanho do Saturno V com os demais lançadores.	6
Figura 2.3 – Taxonomia de classes.	9
Figura 2.4 – Apresentação dos componentes externos e internos de um foguete.	15
Figura 2.5 – Exemplos de coifas.	16
Figura 2.6 – Empenas, aletas de controle e direcionadores de jato.	18
Figura 2.7 – Tipos de propulsão.	19
Figura 2.8 – Sistema propulsivo, motor <i>turbofan</i>	20
Figura 2.9 – Sistema propulsivo, motor de foguete.	21
Figura 2.10 – Tubeira do tipo De Laval.	22
Figura 2.11 – <i>Nozzle</i>	22
Figura 2.12 – Diagrama de um bocal De Laval, que mostra o aumento da velocidade de escape dos gases v na direção do fluxo, com a diminuição da temperatura T e da pressão P . O número Mach M aumenta de subsônico para sônico na garganta e para supersônico na região divergente.	24
Figura 2.13 – (a) Medidas do <i>Shape</i> ; (b) curvas de eficiência conforme a variação do <i>half angle</i> (c) geometria da região divergente.	26
Figura 2.14 – Taxonomia da sequência de desenvolvimento do projeto do foguete.	28
Figura 2.15 – Trajetória parabólica de um foguete.	30
Figura 2.16 – Diagrama de forças que atuam num foguete em voo.	31
Figura 2.17 – Coordenadas do sistema inercial localizado no centro da Terra representados por $X_I; Y_I; Z_I$ e sistema topocêntrico localizado no plano tangente de lançamento representados $x_1; y_1; z_1$	36
Figura 2.18 – Triedro inercial e triedro do corpo. Representações angulares dos movimentos de rotação e translação ao redor dos eixos do foguete.	37
Figura 2.19 – Rotação do triedro inercial sobre os ângulos de Euler e representação dos planos de rotação do foguete.	38
Figura 2.20 – Interferência da deflexão da tubeira na força de empuxo.	40
Figura 2.21 – Representação da força peso sobre a plataforma de lançamento e sobre o referencial relativo ao triedro do corpo.	42
Figura 2.22 – Velocidade relativa do vento ao corpo e a componente vetorial da força aerodinâmica atuante sobre o triedro aerodinâmico e suas decomposições no triedro do corpo.	46
Figura 2.23 – Torque aerodinâmico no plano de <i>YAW</i> causado pela força de sustentação relativa a este plano.	48
Figura 2.24 – Torque aerodinâmico no plano de <i>PITCH</i> causado pela força de sustentação relativa a este plano.	49
Figura 2.25 – Condições de estabilidade de voo.	52
Figura 2.26 – Representação das velocidades inerentes aos eixos x_c, y_c, z_c do foguete.	54
Figura 2.27 – Representação das velocidades angulares inerentes aos eixos do foguete x_c, y_c, z_c	55
Figura 2.28 – Geometria dos grãos.	60

Figura 3.1 – Apresentação das funções que geratrizes do invólucro cilíndrico.	64
Figura 3.2 – Coifa do foguete.	64
Figura 3.3 – Dados da coifa.	65
Figura 3.4 – Sólido de revolução cilíndrico.	66
Figura 3.5 – Estrutura longitudinal do foguete.	66
Figura 3.6 – Dados da estrutura longitudinal.	66
Figura 3.7 – Formato geométrico da aleta e espessura da mesma.	67
Figura 3.8 – Quantidade e disposição das aletas no corpo do foguete.	68
Figura 3.9 – Planta do dimensionamento dos componentes externos do foguete gerado pelo <i>software</i> AeroLab.	68
Figura 4.1 – Curvas dos coeficientes de arrasto de pressão das respectivas coifas.	71
Figura 4.2 – Curva do coeficiente de arrasto de pressão da coifa de $1/2$ de <i>power</i>	72
Figura 4.3 – Comparação entre os arrastos de pressão da coifa de $1/2$ de <i>power</i> e sua base.	73
Figura 4.4 – Coeficientes de Arrasto da aleta.	74
Figura 4.5 – Coeficiente de arrasto do foguete.	75
Figura 4.6 – Empuxo.	76
Figura 4.7 – Curva da velocidade vertical do foguete.	77
Figura 4.8 – Velocidade total do foguete.	78
Figura 4.9 – Trajetória e apogeu de voo do foguete.	79
Figura 4.10 – Relação entre as curvas da altitude e da velocidade total do foguete.	80

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 2.1 – Classificação dos mísseis.	10
Tabela 2.2 – Categoria e característica de cada tipo de voo.....	11
Tabela 3.1 – Dados dimensionais de projeto e propriedades físicas do material.....	63
Tabela 3.2 – Dados dimensionais da estrutura longitudinal.	65
Tabela 3.3 – Dados dimensionais da aleta.....	67
Tabela 3.4 – Dados para a simulação de lançamento do foguete.....	69

LISTA DE SIGLAS

A1 – *Aggregat 1*;
AAM – *Air to Air Missile*;
ABM – *Anti Ballistic Missile*;
ASAT – *Anti Satellite Weapon*;
ASM – *Air to Surface Missile*;
ATM – *Anti Tank Guided Missile*;
CFD – *Computational Fluid Dynamics*;
CG – *Centro de Gravidade*;
CM – *Centro de Massa*;
CM – *Cruise Missile*;
CP – *Centro de Pressão*;
EUA – *Estados Unidos da América*;
GDL – *Gas Dynamics Laboratory*;
GPS – *Global Positioning System*;
HMX – *High Melting point explosive*;
IAE – *Instituto de Aeronáutica e Espaço*;
ICBM – *Intercontinental Ballistic Missile*;
IIT – *Indian Institute of Technology*;
IRBM – *Intermediate Range Ballistic Missile*;
ISS – *International Space Station*;
KNO₃ – *Nitrato de Potássio*;
KNSU – *Propelente a Base de Açúcar e Nitrato de Potássio*;
MEB – *Missão Espacial Brasileira*;
MIT – *Massachusetts Institute of Technology*;
MosGIRD – *Moscow Group for Studying Reaction Engines*;
NASA – *National Aeronautics and Space Administration*;
NH₄ClO₄ – *Perclorato de Amonio*;
NH₄NO₃ – *Nitrato de Amonio*;
R7 – *Russian 7*;
RNII – *Russian Research Institute*;
SAM – *Surface to Air Missile*;
SLBM – *Submarine Launched Ballistic Missile*;
SRBM – *Short Range Ballistic Missile*;
SSM – *Surface to Surface Missile*;
TVC – *Thrust Vector Control*;
UAV – *Unmanned Aerial Vehicle*;
USSR – *Union of Soviet Socialist Republics*;
V2 – *Vergeltungswaffe*;
VLS – *Veículo Lançador de Satélite*;
WBS – *Work Breakdown Structure*;

FOLHAS DE ANEXO

ANEXO I
ANEXO II
ANEXO III
ANEXO

IV

1 INTRODUÇÃO

A história da humanidade é marcada por pessoas que, motivadas por um sonho, pelo conhecimento, criatividade, ou as vezes por pura curiosidade, encontraram soluções que mudaram não apenas as nossas vidas, mas o destino de todo o planeta.

Desde os primórdios, o homem tem observado o espaço e tentado entender as perguntas que surgiam e o indagavam. Aos poucos, a luz do conhecimento foi trazendo brilho através de equações que explicavam ou tentavam explicar o que era observado. Da *Philosophiae* lançada pelos gregos (LONG, 2008) até a Relatividade de Einstein (EINSTEIN, LORENTZ, *et al.*, 1952), o ser humano foi adquirindo ferramentas para poder expandir seus horizontes terrestres em busca da conquista espacial (SHEARER e VOGT, 2003).

Como peça fundamental para o desenvolvimento da ciência e, conseqüentemente, da humanidade, pode-se citar o surgimento dos foguetes (ALWAY, 1995), que lançaram e lançam, ainda hoje, inúmeros equipamentos ao espaço como sondas interplanetárias capazes de revelar os segredos dos planetas mais distantes, telescópios espaciais que observam as estrelas e as galáxias longínquas (JENNER, 2009), além de satélites de sensoriamento remoto, que orbitam o planeta Terra revelando detalhes impossíveis de serem percebidos da superfície.

1.1 OBJETIVO DO TRABALHO

Com o intuito de atender grupos de pesquisas voltados para o estudo de descargas elétricas, este trabalho tem como objetivo desenvolver um foguete de baixo custo, estabilizado aerodinamicamente pela utilização de aletas, com uma massa aproximada de 20 quilos, com carga útil de 5 quilos, com propelente sólido, capaz de atender aos grupos que estudam raios trigados. Para se atingir o objetivo, a modelagem do livro (LEITE FILHO, 2011) foi utilizada como principal referência.

1.2 JUSTIFICATIVA

Foguetes são importantes para o desenvolvimento da ciência. Pode-se citar como exemplo os grupos de pesquisa voltados para o estudo de descargas elétricas, raios, utilizam lançamentos de baixa altitude na direção de nuvens

eletrostaticamente carregadas para provocar uma descarga terrestre (nuvem-terra) em um ponto terreno conhecido. Este projeto, em uma fase de desenvolvimento avançada, poderá atender a estes grupos por meio do foguete de pequenas proporções chamado *Rocket Raccoon 109* apresentado neste trabalho.

1.3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre a história dos foguetes, descrevendo as primeiras civilizações a utilizarem sistemas propulsivos (SHEARER e VOGT, 2003) e para quais finalidades foram utilizados, incluindo os modelos mais atuais.

Após a revisão bibliográfica, a modelagem da dinâmica de foguetes foi iniciada, com o intuito de encontrar equações diferenciais que descrevessem o movimento de um corpo extenso em translação e atitude (GREENSITE, 1970), (SUTTON e BIBLARZ, 2001), (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979) e (MIT, 2013).

Após a modelagem, foi realizado um estudo dos processos químicos envolvidos na produção de propelentes do tipo KNSU (NAKKA, 2013).

Foi realizado um levantamento de materiais, tipos e custos, utilizados por grupos de foguete modelistas, procurando alternativas de construção, sem que isso interfira estruturalmente ou aerodinamicamente no desempenho do foguete.

Por fim, foi desenvolvido um projeto computacional no *software* OPEN ROCKET, detalhando as características físicas (dimensionamento longitudinal, diâmetro do corpo, posicionamento das empenas etc), posicionamento do CG e CP.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O trabalho está disposto da seguinte forma:

O Cap 1 apresenta os estudos para a compreensão do projeto e lançamento de um foguete.

O Cap 2 retrata detalhadamente as ações necessárias para o desenvolvimento do projeto, desenhos, dimensionamentos e cotas, posicionamentos de componentes, entre outros dados relacionados ao projeto estrutural.

O cap 3 mostra os resultados obtidos diante as simulações.

Encerramento do trabalho, o Cap 4 traz o ponto de vista do autor do trabalho diante dos resultados obtidos, seguidos das referências bibliográficas que auxiliaram o desenvolvimento deste trabalho de iniciação científica.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 HISTÓRICO

O surgimento da ciência astronáutica deve-se a Robert Hutchings Goddard (EUA), Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky (Rússia) e Hermann Oberth (Alemanha), os grandes pioneiros na concepção de foguetes e responsáveis pelo ato inicial do estudo e desenvolvimento do assunto. Robert Hutchings Goddard (1882 – 1945) especializou-se na concepção e construção de foguetes propelidos por combustível líquido (gasolina e oxigênio). O primeiro voo de um foguete de Goddard aconteceu em 16 de março de 1926, em Auburn, no estado de Massachusetts (JENNER, 2012).

Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky (1857 – 1935) foi o primeiro a calcular a velocidade de escape de um veículo da Terra. Seu trabalho é considerado o primeiro estudo acadêmico sobre tecnologia de foguetes (CANRIGHT, 2012). Tsiolkovsky realizou mais de quinhentas publicações ao longo de sua vida relacionadas a assuntos espaciais, pontuando-se entre suas obras: esquemas para foguetes com múltiplos estágios, estações espaciais e sistemas biológicos para fornecer comida e oxigênio a colônias no espaço (CANRIGHT, 2012).

Hermann Oberth (1894 – 1989) foi o primeiro a imaginar o chamado “foguete de recuo”, baseado em um impulso gerado pela expulsão de gases de escape por um bocal. Oberth tornou-se mentor de Wernher Von Braun e, juntos, trabalharam na pesquisa de foguetes para a Alemanha e para os Estados Unidos (CANRIGHT, 2010).

Ao final do ano de 1933, surgiu o projeto *Aggregat*, na Alemanha, sob o comando da *Wehrmacht*, cujo objetivo era projetar e desenvolver vários tipos de foguetes (LEY e CLARKE, 1969). O primeiro foguete da série *Aggregat* foi o A-1 projetado pelo engenheiro Wernher Von Braun em Kummersdorf sob o comando de Walter Dornberger. Este míssil tinha finalidades militares e foi o primeiro a ter um sistema de arrefecimento utilizando o próprio combustível embarcado (LEY e CLARKE, 1969). Todo o programa espacial alemão pode ser visto na Figura 2.1.

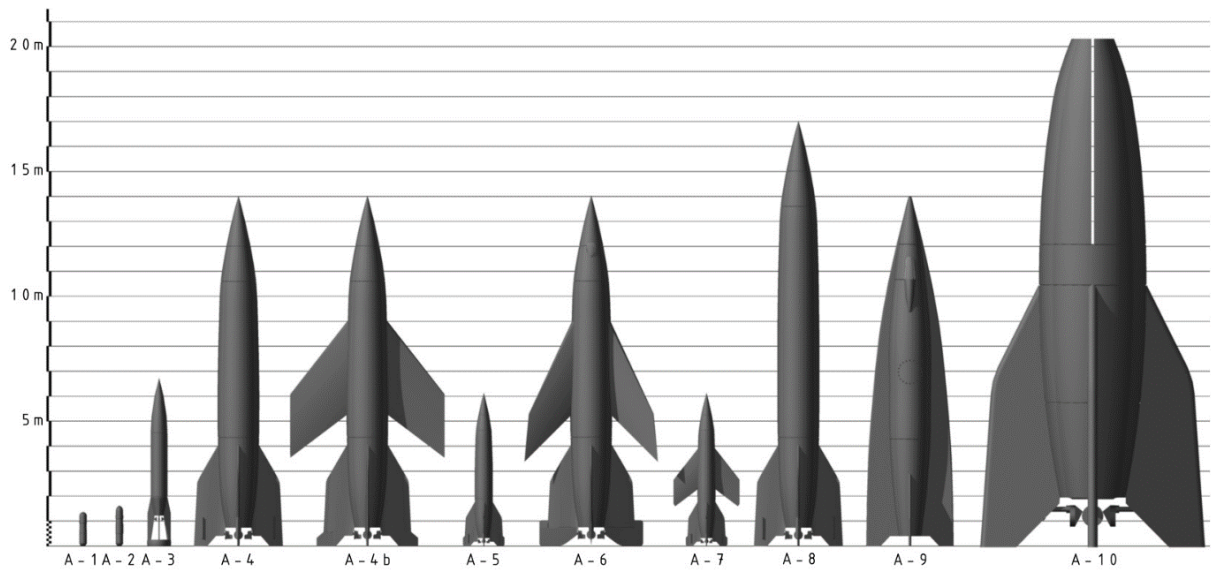


Figura 2.1 – Modelos de mísseis projetados pelo programa espacial alemão.

Fonte: (SPIKE, 2007).

Com o final da Segunda Grande Guerra, a Alemanha foi dividida em duas partes, uma ocidental e outra oriental tendo como tutores Estados Unidos e União Soviética, respectivamente. Devido ao sucesso da V2, os engenheiros responsáveis pelos projetos das bombas alemãs renderam-se e foram levados para o EUA junto com os principais projetos em papel, enquanto que para União Soviética restaram poucas coisas, como um exemplar da V2 e alguns documentos de projetos que não foram levados pelos americanos (MILLER, 1999).

O primeiro país a conseguir tal feito foi a União Soviética, com o míssil balístico intercontinental R7 (KOROLEV, 2013) e (CHERTOK, 2006). Este foi o responsável pelo lançamento da primeira sonda espacial conhecida como *Sputnik*, lançada em 4 de outubro de 1957 do Cosmódromo de *Baikonur* (CHERTOK, 2006). Em 3 de novembro de 1957, o veículo *Sputnik II* carrega a bordo o primeiro ser vivo a ir para o espaço, a cadela russa chamada *Kudryavka* (crespinha). Os EUA responderam com seu primeiro satélite, o *Explorer I*, lançado em 31 de janeiro de 1958 pelo foguete Júpiter-C (CONWAY, 2003).

O foguete Titan II, que possuía dois andares, foi usado para o lançamento das capsulas Gemini no período de 1964 – 1966. Lançou doze cápsulas, dentre essas dez tripuladas (STUMPF, 2000).

Em 1958 no *Marshall Space Flight Center* da NASA inicia-se o desenvolvimento do Saturno V (WILSON, 2012), sendo até hoje, um dos maiores veículos desenvolvidos pela humanidade. A Figura 2.2 apresenta a comparação, em comprimento, dos foguetes criados pelos Americanos.

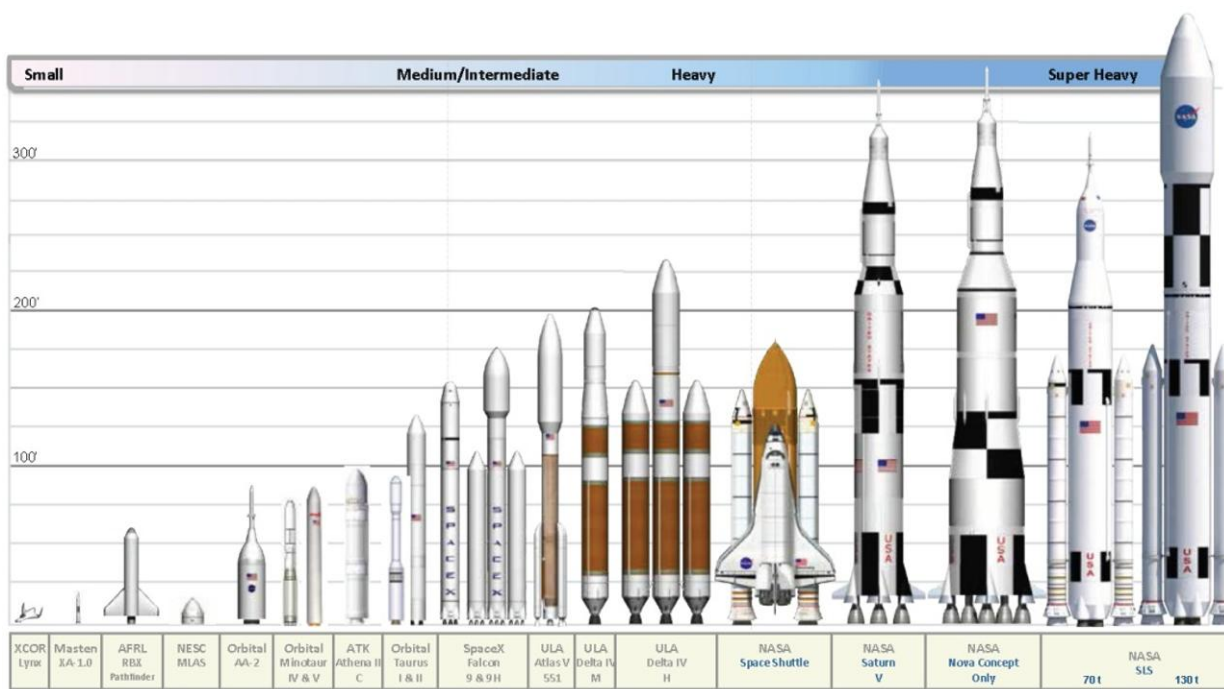


Figura 2.2 – Comparação de tamanho do Saturno V com os demais lançadores.

Fonte: (THE UNWANTED BLOG, 2012).

Daí por diante, *rovers* foram enviados para estudar o solo de Marte (NASA, 2010) (JPL - NASA, 2012) entre outras diversas missões (DAVIS, 2010). Todas elas realizadas por meio de foguetes lançadores. O contato inciatício brasileiro com um programa espacial, deve-se a parceria feita entre Brasil e EUA, em 1956, com a montagem de uma estação de rastreamento no arquipélago de Fernando de Noronha para rastrear as transmissões das cargas úteis dos foguetes lançados de Cabo Canaveral (GOUVEIA, 2003). O primeiro lançamento do Brasil ocorreu na década de sessenta com o foguete de sondagem SONDA I (FAB, 2006).

Durante o século XX, a pesquisa científica na área de foguetes lançadores foi acompanhada também de forma amadora, que também conseguiu se aperfeiçoar durante o passar do tempo (NAKKA, 2013). Hoje em dia, grupos amadores de foguete modelismo projetam, constroem e lançam foguetes de pequeno porte para

diversas aplicações (NAKKA, 2013). Richard Nakka é um dos mais conhecidos modelistas de foguetes experimentais. Seus projetos se iniciaram em meados da década de 70 e, até hoje, prosseguem com seus (NAKKA, 2013).

2.2 FOGUETE

2.2.1 DEFINIÇÃO

Foguetes ou mísseis são veículos ou armas, geralmente de geometria cilíndrica, de formato esguio, de comprimento alongado ou não, lançados na vertical ou horizontal por meio de motores que queimam, em sua cavidade interna, uma mistura definida como propelente. Podendo ser lançados também de pontos estacionários ou em movimento, com finalidades civis ou militares (HILL e PETERSON, 1992), (SUTTON e BIBLARZ, 2001) e (OXFORD UNIVERSITY, 2013).

2.2.2 TIPOES DE FOGUETE

Existem muitos tipos de foguetes, cada um deles específico para um tipo de missão. Todavia, todos tem uma característica comum que é carregar toda a massa de propelente em sua plataforma. Eles podem ser desde artefatos típicos de festas folclóricas até veículos complexos e altamente integrados, responsáveis por realizar transportes espaciais (BARRY, 2012). Alguns exemplos de foguetes:

- Modelos minúsculos de foguete (busca-pé, espada de São João);
- Foguetes amadores que podem ser produzidos ou comprados em lojas especializadas de foguete amadorismo.
- Carros foguete;
- Motos foguete;
- Aeronaves de motor a jato;
- Trens foguete;
- Torpedos (geralmente mísseis militares);
- Mochilas a jato;

- Sistemas de assento ejetável;
- Foguetes lançadores, foguetes espaciais e sondas.

2.2.3 USO/FINALIDADE

As principais finalidades para o uso de foguetes são militares, investigações científicas, voos espaciais, resgates e entretenimento. A Figura 2.3 apresenta o diagrama de especificação de classe. A finalidade militar foi destacada em cores para que ficasse mais visual a explanação das siglas na Tabela 2.1.

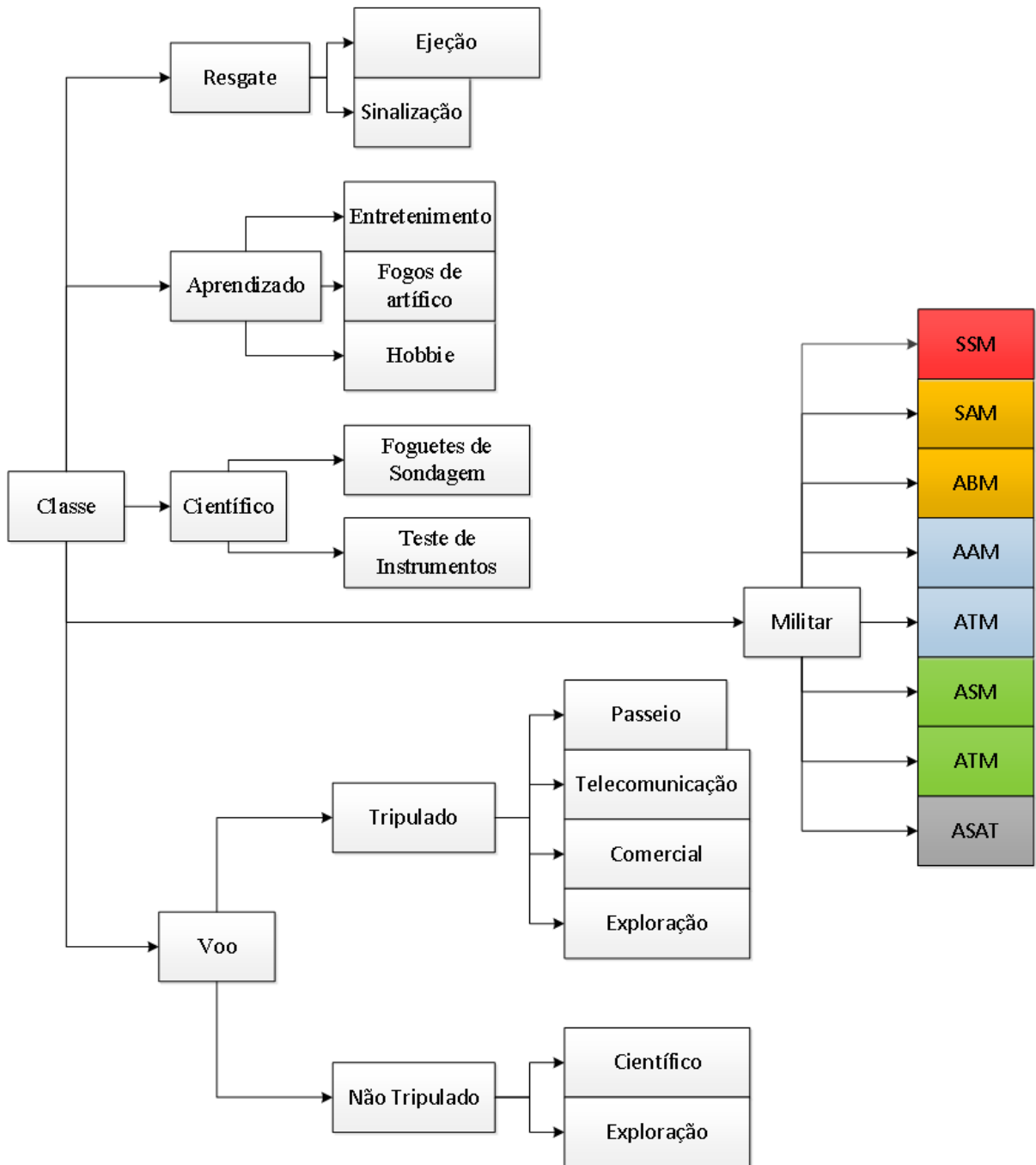


Figura 2.3 – Taxonomia de classes.

2.2.4 MILITAR

Algumas armas militares impulsionam cargas explosivas até atingirem seus alvos. Se o sistema bélico que impulsiona possui orientação são geralmente referidos como mísseis, caso contrário, o sistema bélico é chamado de foguete (RIPER, 2004). O lançamento pode ser realizado de uma base estática localizada em terra ou

em algum outro veículo em movimento (avião, submarino ou tanque). Eles podem ser classificados de acordo com a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Classificação dos mísseis.

Mísseis		
SSM (terra-terra)	ICBM	Míssil Balístico Intercontinental
	IRBM	Míssil Balístico de Médio Alcance
	SRBM	Míssil Balístico de Curto Alcance
	SLBM	Míssil Balístico Lançado de Submarino
	CM	Míssil de Cruzeiro
SAM (terra-ar)	SAM	Míssil terra-ar
	ABM	Míssil antibalístico
AAM (ar-ar)	AAM	Míssil ar-ar
	ATM	Míssil antitanque
ASM (ar-terra)	ASM	Míssil ar-terra
	ATM	Míssil antitanque
ASAT	Armas antissatélite	

2.2.5 INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

Foguetes de sondagem são veículos responsáveis por embarcar equipamentos capazes de realizar testes em instrumentos usados em satélites e naves espaciais. Responsáveis também por carregar instrumentos de leitura e de aferição de dados e para realizar experimentos em voo sub-orbital. Geralmente atingem altitudes em torno de 50 a 1500 km acima da superfície da Terra (MARCONI, 2007). A Tabela 2.2 apresenta as categorias e características de cada tipo de voo.

Tabela 2.2 – Categoria e característica de cada tipo de voo.

Categoria	Descrição	Distância Percorrida
Voo espacial suborbital	A nave espacial chega espaço e, em seguida, retorna para a atmosfera após seguir uma trajetória balística (principalmente).	100 km acima do nível do mar.
Voo espacial orbital	Voo espacial orbital (ou voo orbital) é aquele cujo uma sonda é colocada numa trajetória, o qual poderia permanecer no espaço por pelo menos uma órbita.	Altitudes acima de 100 km.
Voo espacial interplanetário	Voo interplanetário é aquele cuja as viagens são entre os planetas dentro de um único sistema planetário.	Tomando a Terra como referência, a distância varia de acordo com o período orbital do planeta em que se pretende chegar. Marte, por exemplo quando está mais próximo da Terra se encontra a 56.000.000 km
Voo espacial interestelar	Voo interestelar é aquele cuja as viagens são entre planetas de outros sistemas estelares dentro de uma mesma galáxia.	Também varia conforme as condições orbitais e de um sistema estelar para outro. Por exemplo, Alpha Centauri se encontra a 4,3 anos luz da Terra e é o sistema solar mais próximo do sistema solar.
Voo espacial Intergaláctico	Voo intergaláctico é aquele cuja as viagens são entre galáxias.	A galáxia anã ou satélite mais próxima do centro da Via Láctea é a de Cão Maior que está a 42 mil anos luz.
Voo espacial suborbital ponto-a-ponto	Ponto-a-ponto é uma categoria de voo espacial, entre países, em que utiliza-se de um voo suborbital como forma de transporte de passageiros.	Por exemplo, uma viagem de Londres a Sydney pode durar duas horas em um voo ponto-a-ponto.

2.2.6 VOO ESPACIAL

O voo espacial é realizado por meio de uma nave, tripulada (ENCYCLOPEDIA ASTRONAUTICA, 2012) ou não (JPL - NASA, 2012), que parte de uma plataforma de lançamento que fornece suporte estável até alguns segundos após a ignição, em voo balístico, com o objetivo de exploração espacial ou atividades comerciais e de telecomunicações por satélite. Como geralmente esses voos são de caráter orbital (SIDDIQI, 2010) ou além (BUTRICA, 1998) a velocidade de escape precisa ser vencida e daí se faz o uso dos foguetes com o intuito de aumentar a velocidade de lançamento e conseqüentemente vencer a velocidade de escape do planeta Terra. Desta forma, a nave começa a desprender-se e passa a sair do solo, escapando do efeito gravitacional terrestre.

Uma voo espacial tripulado ocorre por meio de um ônibus espacial ou por uma capsula. O programa espacial americano utilizava o *Space Shuttle*, como veículo para voo tripulado, mas tornou-se economicamente inviável manter essas missões pelo uso do *Shuttle* e o mesmo foi desativado (JENKINS, 2002). Hoje em dia, qualquer missão tripulada americana à ISS é realizada pela capsula russa *Soyuz TMA*, por meio do acordo entre os programas espacial russo norte americano (WRIGHT, 2013). A NASA está trabalhando em um novo projeto de veículo tripulado, a capsula Orion (GARCIA, 2013). Por outro lado, voos não tripulados como sondas espaciais que deixam a órbita da Terra (JPL - NASA, 2012) ou satélites orbitais terrestres (INPE, 2011), podem ser citados como exemplo. Estes operam tanto por controle tele robótico ou são completamente autônomos.

2.2.7 RESGATE

Alguns foguetes tripulados como Saturno V e Áries são capazes de arremessar os astronautas para longe do foguete caso a missão falhe e precise ser abortada. Este sistema é conhecido como "Torre de Abortamento de Lançamento" (INOVAÇÃO TECNOLÓGICA, 2009). Este sistema é bastante parecido com os assentos ejetáveis de aeronaves militares, podendo ser considerados também como foguetes de resgate por serem capazes de impulsionar os pilotos para longe de suas aeronaves (BONSOR, 2008).

Outro exemplo seriam os foguetes de emergência conhecidos como pistolas sinalizadoras. Quando acionadas propulsionam uma carga luminosa para o alto que pode ser vista a alguns quilômetros de distância.

2.2.8 ENTRETENIMENTO E MISSILISMO

Por se tratar de um assunto fascinante muitos entusiastas propõem-se a projetar, construir e lançar foguetes de pequeno porte classificados como foguetes amadores. Muitas destas pessoas acabam trabalhando de forma profissional nesta área. Um caso bastante conhecido é o de Homer Hickam, cientista da NASA (HICKAM JR, 2000) e (October Sky, 1999).

Foguetes amadores podem ser construídos por meio de utensílios simples, como uma garrafa pet, movido com a água sob pressão, atingindo poucos metros de altura. Modelos mais complexos a base de propelentes ignitivos podem atingir altitudes mais elevadas, entretanto a periculosidade e os riscos de danos físicos aos foguete modelistas aumentam, necessitando de cautela no desenvolvimento e operação deste tipo de projeto. Um nome muito conhecido entre os foguete modelistas é o de Richard Nakka, que tem por finalidade foguetes movidos a propelente de açúcar e nitrato de potássio (NAKKA, 2012).

Foguetes também são usados por alguns tipos de fogos de artifício.

2.3 COMPONENTES

Um foguete pode ser dividido em componentes internos e externos como apresenta a Figura 2.4. Serão comentados os seguintes componentes:

- Cone do nariz ou coifa;

- *Payload*¹ (Carga);
- Sistema aviônico;
- Fuselagem;
- Empena e aletas de controle;
- Sistema propulsivo (motores);
- *Boosters* (propulsores extras).

¹ A carga útil (*payload*) podendo ela ser: militar de caráter explosivo, incendiário, químico, biológico, um sistema eletrônico de reconhecimento (UAV); civil tecnológico: sondas, satélites, telescópios e etc.

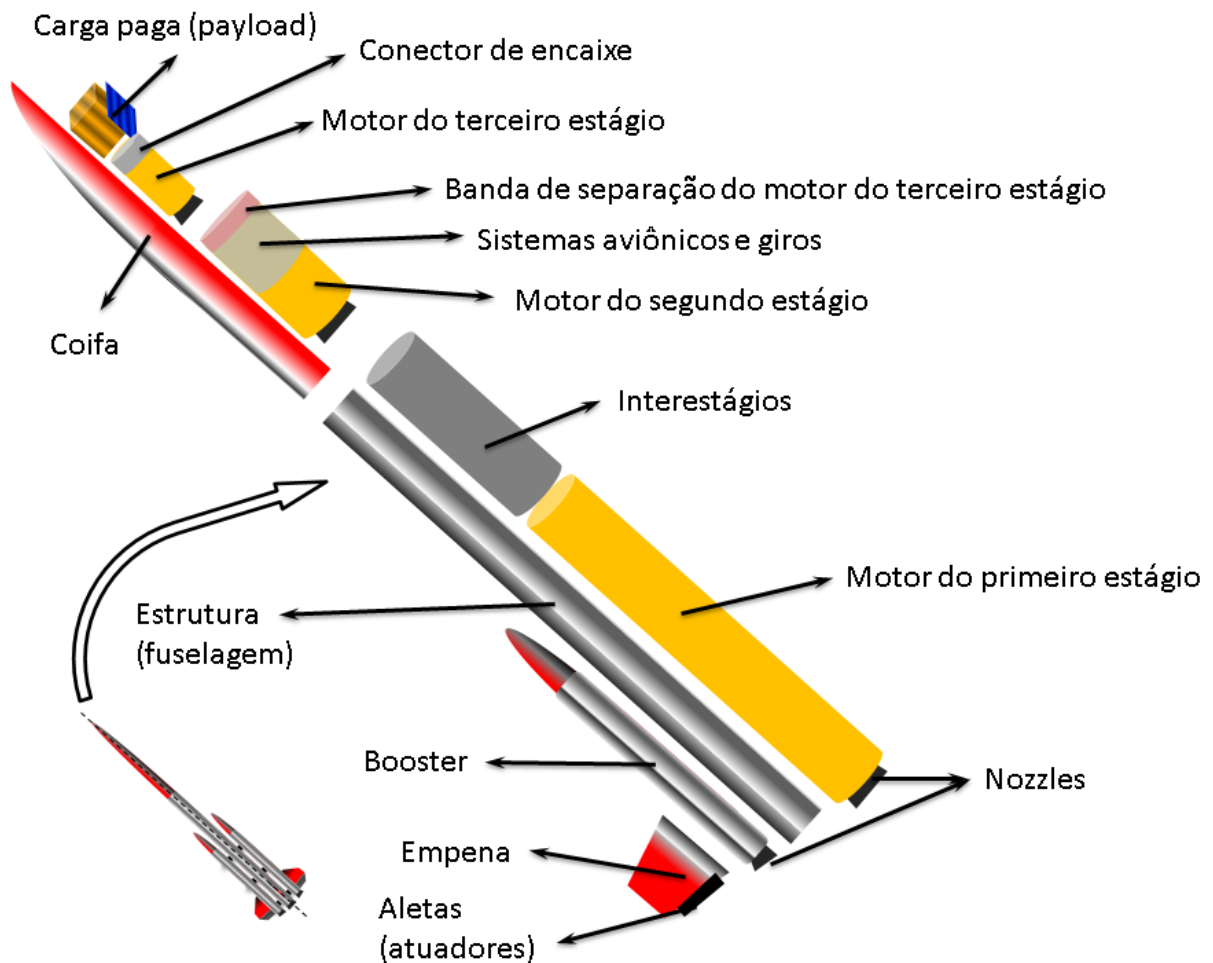


Figura 2.4 – Apresentação dos componentes externos e internos de um foguete.

2.3.1 CONE DE NARIZ OU COIFA

Coifa é um tipo de estrutura aerodinamicamente disposta no extremo superior do foguete, com o intuito de minimizar os efeitos de resistência ao movimento (força de arrasto) tal como proteger a carga útil dos efeitos de voo. Em alguns casos, a coifa pode envolver não apenas a carga útil, como também toda ou parte do último estágio do foguete. Sua construção pode atender as seguintes características (WILEY e SARAFIN, 2007) (KUMPEL, BARROS, *et al.*, 2002):

- Formato cilíndrico abaulado ou cônico;
- Composta por duas (ou mais) partes longitudinalmente simétricas;
- Fabricada com materiais leves como: alumínio ou materiais compostos.

As partes de uma coifa podem ou não se separar. A separação acontece após ultrapassado os limites da atmosfera, a carga útil é exposta e preparada para atender sua finalidade. Os formatos geométricos de uma coifa são apresentados na Figura 2.5.

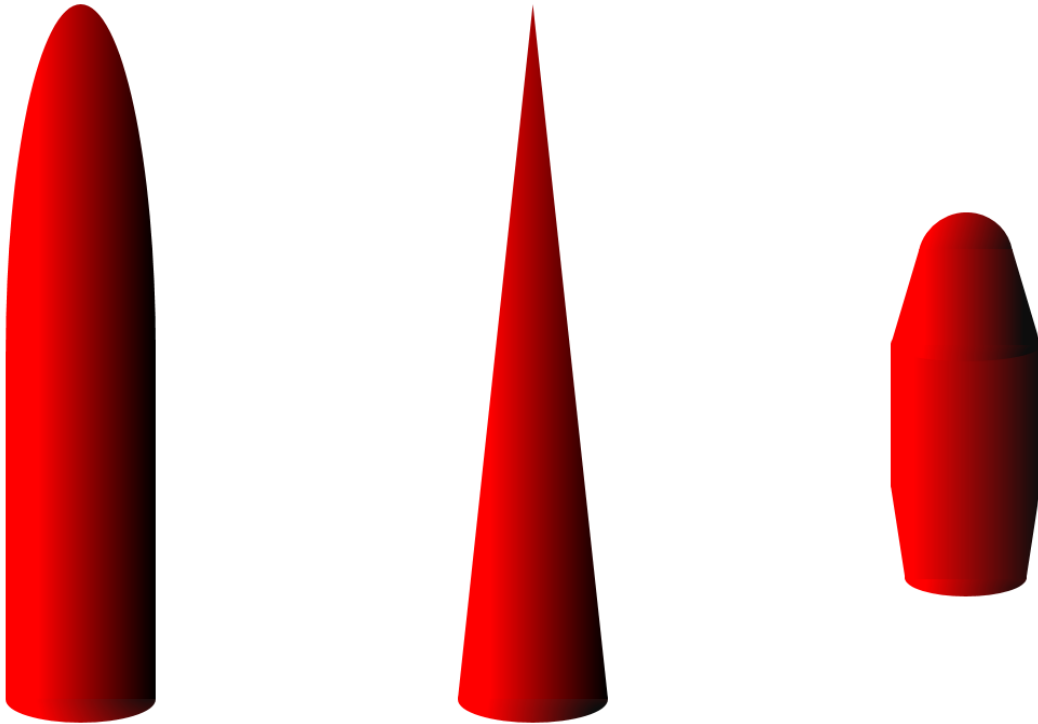


Figura 2.5 – Exemplos de coifas.

2.3.2 PAYLOAD (CARGA ÚTIL)

O sistema de *payload* dependerá da missão e pode caracterizar-se de duas formas: civil ou militar (SÁNCHEZ, APARICIO e PILLET, 2005). Sendo a carga útil um artefato civil, ela será uma sonda, um satélite, um telescópio (*Hubble*) um ou mais equipamentos de experiências espaciais. Se o *payload*, por sua vez, se tratar de artefato militar, este será algum tipo de arma explosiva, química, biológica/bacteriológica ou nuclear.

2.3.3 SISTEMA AVIÔNICO

Os sistemas aviônicos em foguetes são os computadores e equipamentos eletrônicos responsáveis por automatizar e controlar o guiamento e o controle, os vários tipos de sensores e atuadores, localizadores de posição (GPS) (NASA, 1975).

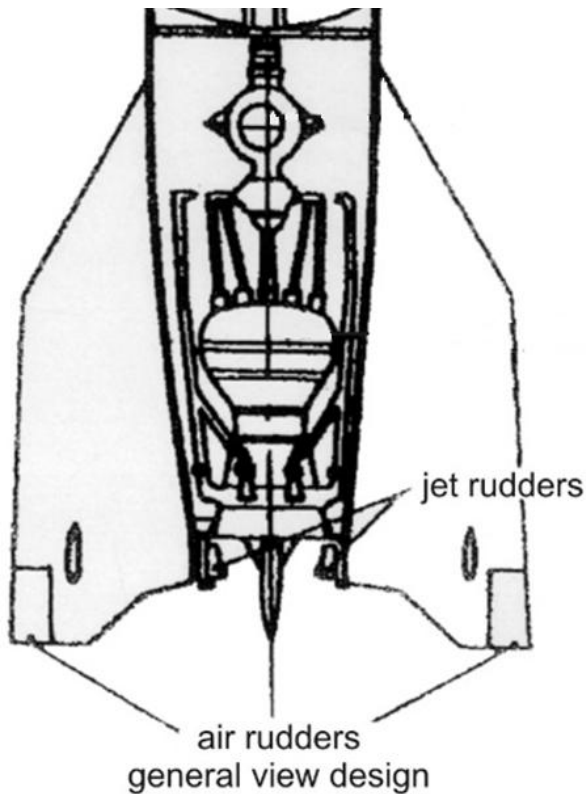
2.3.4 FUSELAGEM

Todo o sistema estrutural externo que compõem o corpo longitudinal do foguete ou de um míssil é conhecido por fuselagem. Estas estruturas geralmente são feitas a partir de materiais de baixa densidade, com elevada resistência mecânica, como por exemplo o titânio ou o alumínio (YU e LI, 2012). Uma forma de reforçar ainda mais a fuselagem é fazer uso de estruturas internas, conhecidas por longarinas, que se estendem por todo o corpo do objeto, da parte superior para a parte inferior, e são amarradas entre si por estruturas circulares conhecidas por aros ou cintas que encontram-se dispostas em torno de toda a circunferência do foguete. Sobre a armação de longarinas e aros é colocado chapas conhecidas por "pele". Desta forma, sobre às longarinas, os aros e o revestimento se forma a base do foguete. As peles costumam possuir um revestimento térmico capaz de dissipar o calor gerado pelo atrito com o ar durante o voo, protegendo os combustíveis e oxidantes.

2.3.5 EMPENAS E ALETAS DE CONTROLE

Empenas são utilizadas em alguns foguetes com a finalidade de fornecer estabilidade aerodinâmica durante o voo e se encontram na parte inferior da estrutura como apresentada na Figura 2.19. Quando um foguete não possui sistema de controle é utilizada a configuração geométrica de posição defasada entre o CP e o CG. Isto é conhecido como controle passivo e quando o objeto, em voo, tende a se afastar da trajetória por causa de alguma perturbação esta configuração tende a trazer o objeto pra posição novamente.

Quando utiliza-se de sensores e aletas móveis capazes de atuar num foguete em movimento de maneira a corrigir qualquer distúrbio de trajeto, é dado o nome de controle ativo. Sua função é corrigir a trajetória do foguete por meio de aletas, jatos de gás ou TVC. Isso pode ser observado na Figura 2.6.



V 2



VS 40

Figura 2.6 – Empenas, aletas de controle e direcionadores de jato.

Fonte V2: (VERBEEK, 2005).

Fonte VS40: (BANDEIRANTE, 2010).

2.3.6 PROPELENTES

O propelente é um produto químico composto por uma parte combustível e outra oxidante. Sua queima confinada numa câmara de combustão e produz um gás a alta pressão, que ao passar por uma tubeira, impulsiona o foguete para cima (SUTTON e BIBLARZ, 2001).

Propelentes são materiais energéticos e sua constituição dependerá de seu estado físico. A Figura 2.7 apresenta os vários tipos de propelentes usados como agentes gerados de empuxo.

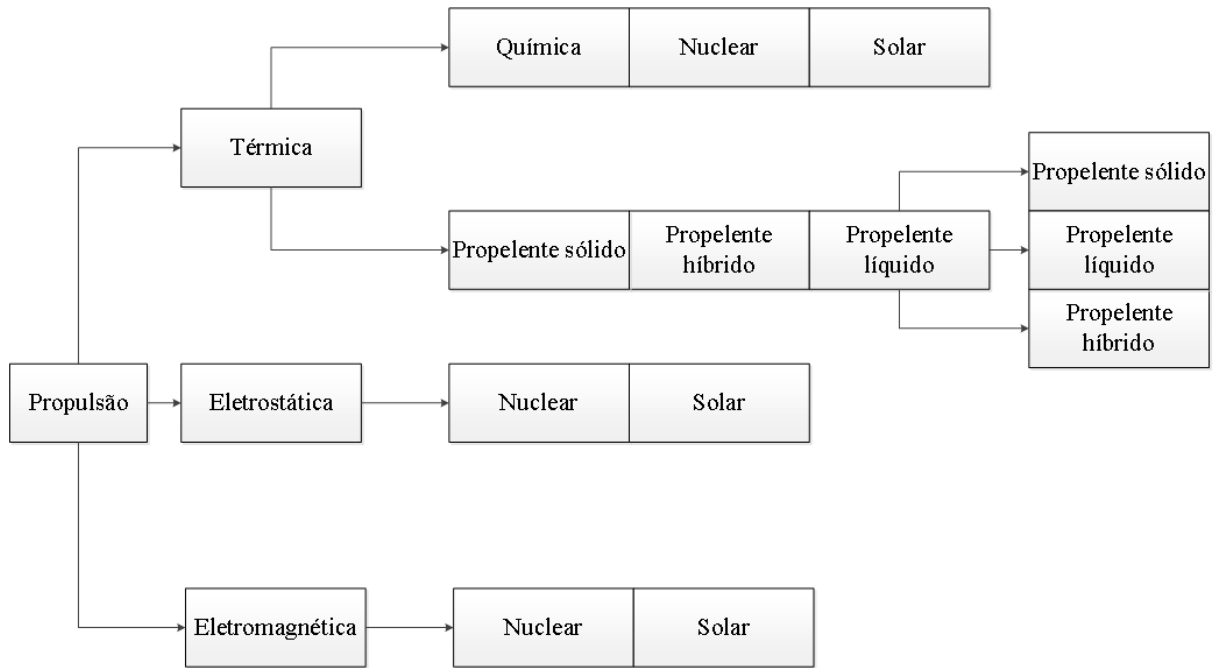


Figura 2.7 – Tipos de propulsão.

2.3.7 SISTEMA PROPULSIVO (MOTORES)

O sistema propulsivo de um foguete é composto por uma câmara de combustão, que utiliza a massa de propelente queimada em sua extremidade interna para gerar um gás a alta temperatura e a alta pressão e acelerá-lo por meio de um bocal restritor (*nozzle*), gerando o assim o impulso necessário para tirar o foguete do chão (SUTTON e BIBLARZ, 2001). A câmara de combustão é definida de acordo com o tipo de propulsor utilizado e este pode ser dos seguintes tipos (MIT, 2013):

- Térmico, o gás é acelerado e expelido pelo *nozzle* devido a diferença de pressão interna a câmara de combustão e a pressão ambiente.
- Eletrostático, os íons são acelerados por um campo eletrostático \vec{E} :
- Força eletrostática sobre eletrodos (motores iônicos);
- Força sobre bobinas magnéticas através de um gás ionizado (Propulsores de efeito Hall);
- Eletromagnética, o gás é acelerado por forças de campo eletromagnético $(\vec{j} \times \vec{B})$, por meio de bobinas ou condutores.

A grande diferença entre os motores de foguetes e motores de respiração de ar (motores a jato) encontra-se na forma como seus respectivos veículos dispõem de seus propelentes (combustível + oxidante) no momento da queima. Os motores foguete, à medida que queimam e ganham altitude, levam consigo embarcado todo o propelente até que o mesmo acabe. Em contrapartida, os motores *turbofan* carregam apenas o combustível consigo tendo de aspirar o ar atmosférico (oxidante) com o intuito de enriquecer a mistura (combustível + oxidante) dentro da câmara de explosão. Ambos os motores geram empuxo ao transformar a energia em quantidade de movimento à medida que o propelente queima e é expelido pelo motor. A Figura 2.8 apresenta um motor *turbofan* e a Figura 2.9 apresenta um motor de foguete.

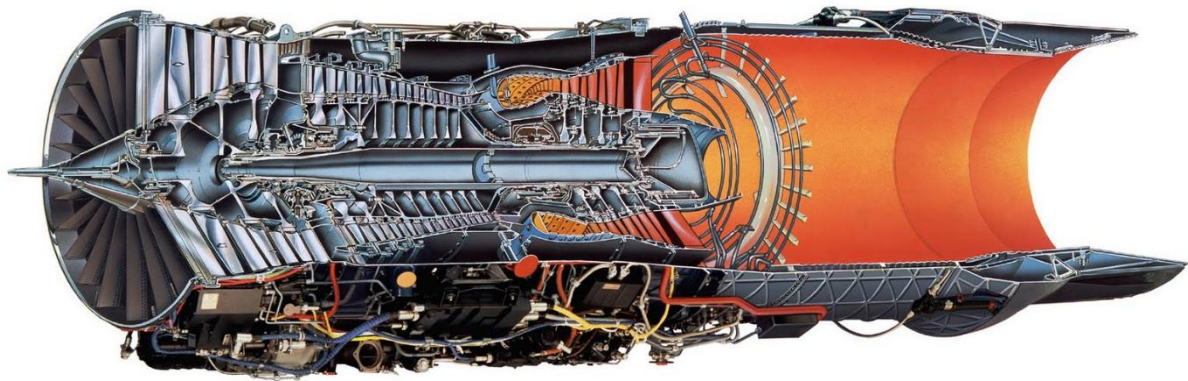


Figura 2.8 – Sistema propulsivo, motor *turbofan*.

Fonte: (PRATT & WHITNEY, 2010).



Figura 2.9 – Sistema propulsivo, motor de foguete.

Fonte: (IAE, 2013).

2.3.8 NOZZLES

O *nozzle* é um dispositivo projetado para controlar a direção de fluxo, expandir e acelerar os gases gerados pela combustão de propelente dentro da câmara de combustão, de modo que os gases de escape atinjam a saída do bocal com velocidades hipersônicas (HILL e PETERSON, 1992) e (SUTTON e BIBLARZ, 2001). Geralmente seu formato compreende uma região de convergência, estricção e divergência dos gases, este tipo é conhecido como *nozzle* De Laval (SUTTON e BIBLARZ, 2001). A Figura 2.10 apresenta uma tubeira do tipo De Laval e a Figura 2.11 apresenta um *nozzle* utilizado em satélite.

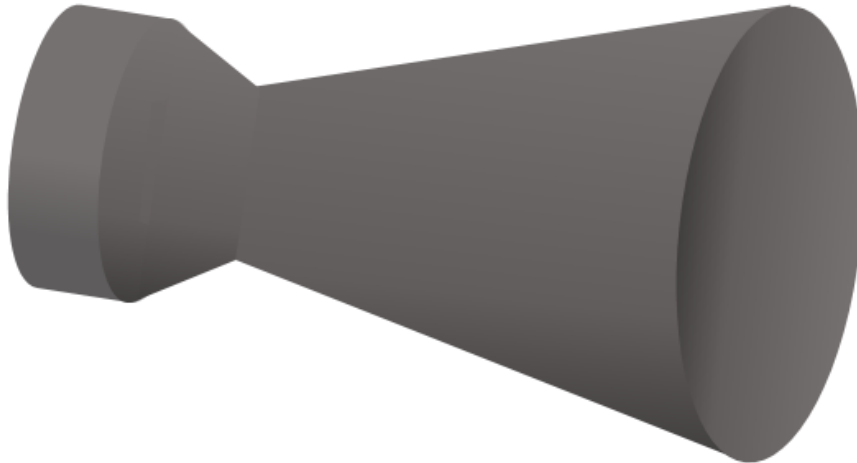


Figura 2.10 – Tubeira do tipo De Laval.



Figura 2.11 – Nozzle.

O gás passa por uma quantidade de processos termodinâmicos até que escape pela área de divergência do *nozzle*. À medida que o gás percorre a zona de expansão do bocal, a pressão e a temperatura diminuem e a velocidade do gás aumenta significativamente. A natureza supersónica do jato de escape significa que a pressão

dos gases de escape pode ser diferente da pressão externa, ambiente do ar exterior (HILL e PETERSON, 1992).

A Figura 2.12 mostra o comportamento da pressão, temperatura e velocidade do gás de escape ao percorrer a região de convergência, estrição e divergência.

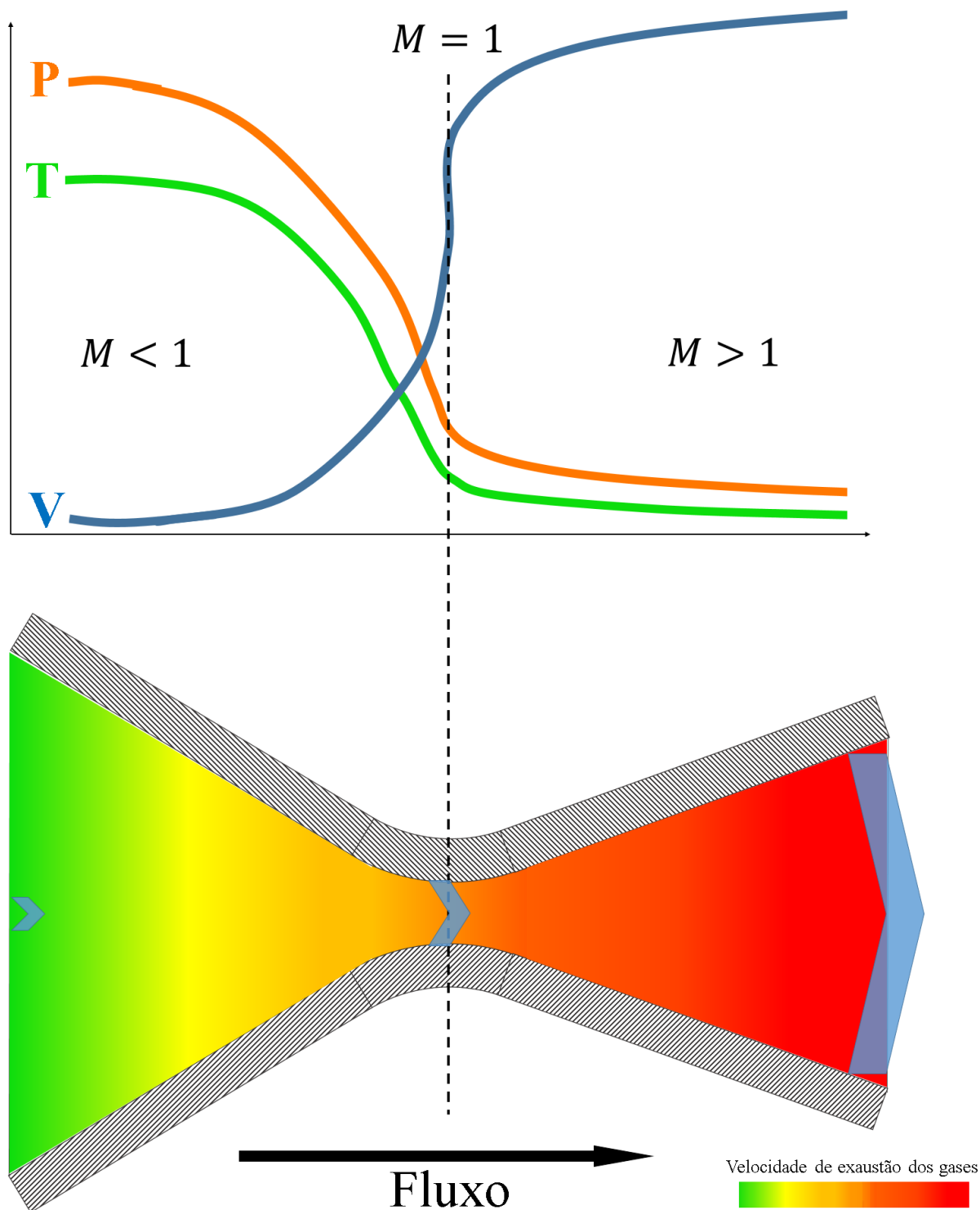


Figura 2.12 – Diagrama de um bocal De Laval, que mostra o aumento da velocidade de escape dos gases (v) na direção do fluxo, com a diminuição da temperatura (T) e da pressão (P). O número Mach (M) aumenta de subsônico para sônico na garganta e para supersônico na região divergente.

Se a pressão de saída é baixa, então o jato pode separar-se do bocal. Geralmente este processo é instável e o jato pode causar danos mecânicos no *nozzle*, já que são gerados grandes impulsos fora do eixo central.

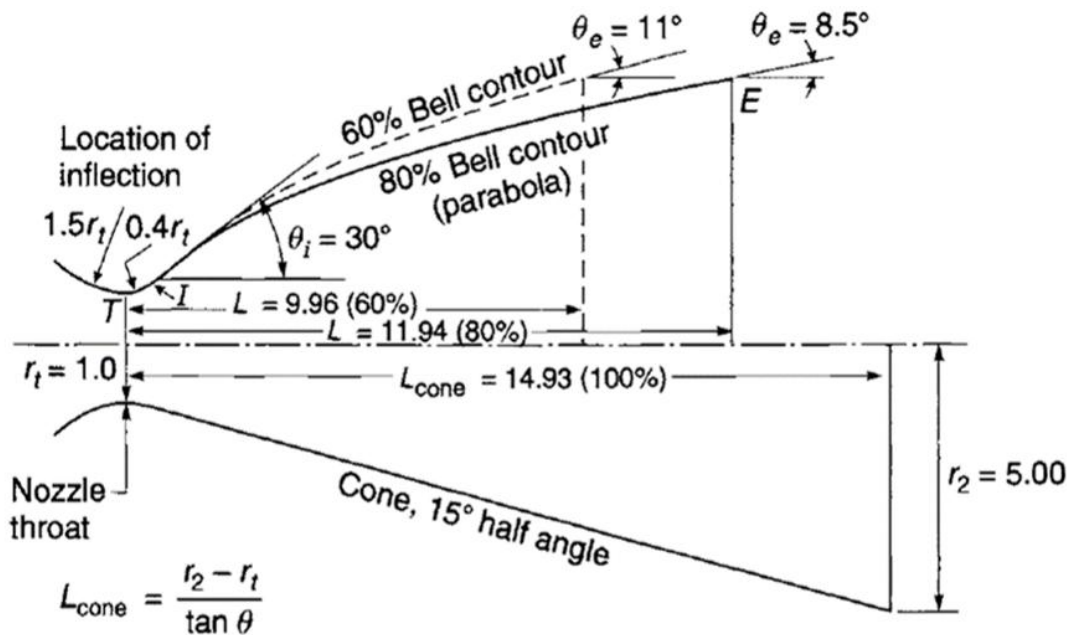
A relação entre a área da garganta com a do plano de saída do bocal é o que determina a eficiência e a conversão da expansão dos gases de escape em velocidade linear, velocidade de escape e, por conseguinte, o impulso que gera o movimento de ascensão do foguete. Esta relação entre as áreas é descrita de acordo com a Equação (2.1).

$$\frac{A_g}{A_D} \leq \frac{1}{2\sqrt{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (2.1)$$

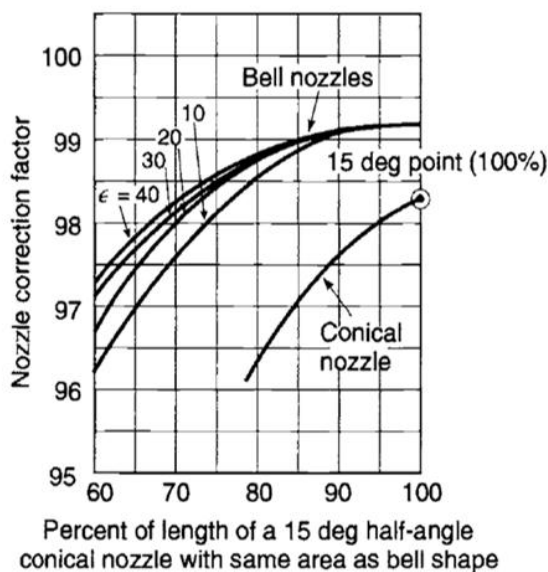
em que A_g é a área da garganta, A_D área final da região divergente e k fator de expansão isentrópica.

O formato do bocal também afeta modestamente a eficiência da expansão dos gases de escape, e, por conseguinte, a conversão em movimento linear (HILL e PETERSON, 1992). A forma mais simples de bocal é com um ângulo de 15° (graus) na região divergente. Formas mais complexas também são usadas, tais como bicos de Bell ou formas parabólicas (SUTTON e BIBLARZ, 2001). Estes formatos são amplamente utilizados em veículos de lançamento e outros foguetes, onde a carga útil é um fator crítico.

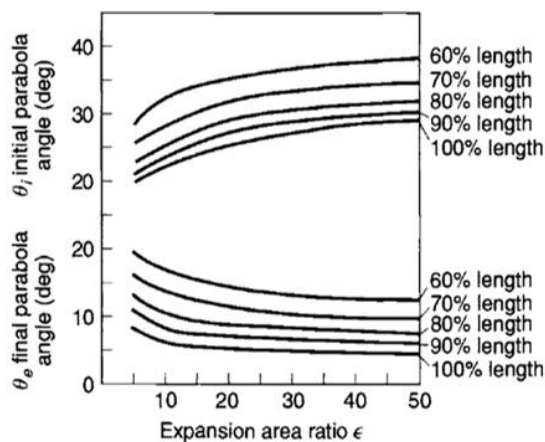
Outro aspecto que afeta a eficiência de uma tubeira de foguete é o ângulo da garganta entre as junções das regiões divergente e convergente, sendo este bem suave. A Figura 2.26 a) apresenta a geometria e as características físicas de um *nozzle* tipo Bell, Bell parabólico e cônico; b) curvas de eficiência conforme a variação do *half angle*; e c) geometria da região divergente.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.13 – (a) Medidas do Shape; (b) curvas de eficiência conforme a variação do half angle (c) geometria da região divergente.

Fonte: (SUTTON e BIBLARZ, 2001).

2.4 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento do modelo iniciou-se um estudo generalizado sobre as forças e torques que atuam no foguete durante o voo. Em resumo, as forças envolvidas são: 1) Aerodinâmica, causada pela interação entre o fluido e o foguete;

2) Inerciais, devido movimento de translação e rotação do foguete, relativo ao referencial terreno (inercial); 3) Peso, por se tratar de um corpo sob a ação da aceleração da gravidade terrena; 4) Empuxo, causado pela combustão e exaustão dos gases durante a queima. De maneira análoga, os torques existentes, causados por estas forças, são: 1) Aerodinâmico, devido a ação da força aerodinâmica no braço de alavanca formado pela diferença entre o centro de pressão e o centro de gravidade; 2) Amortecimento aerodinâmico, causado pela ação do atrito do foguete com o ar e a velocidade angular; 3) Amortecimento de jato, causado pela retirada de energia do movimento angular por meio do efeito da exaustão dos gases. Em suma, o que foi descrito anteriormente, descreve a dinâmica do movimento.

Em seguida, focou-se no estudo de motores foguete a propelente sólido, tal como a composição química destes propelentes, as diversas geometrias possíveis para este tipo de propelente e motores foguete. A Figura 2.14 mostra a taxonomia da sequência seguida para o desenvolvimento do projeto.

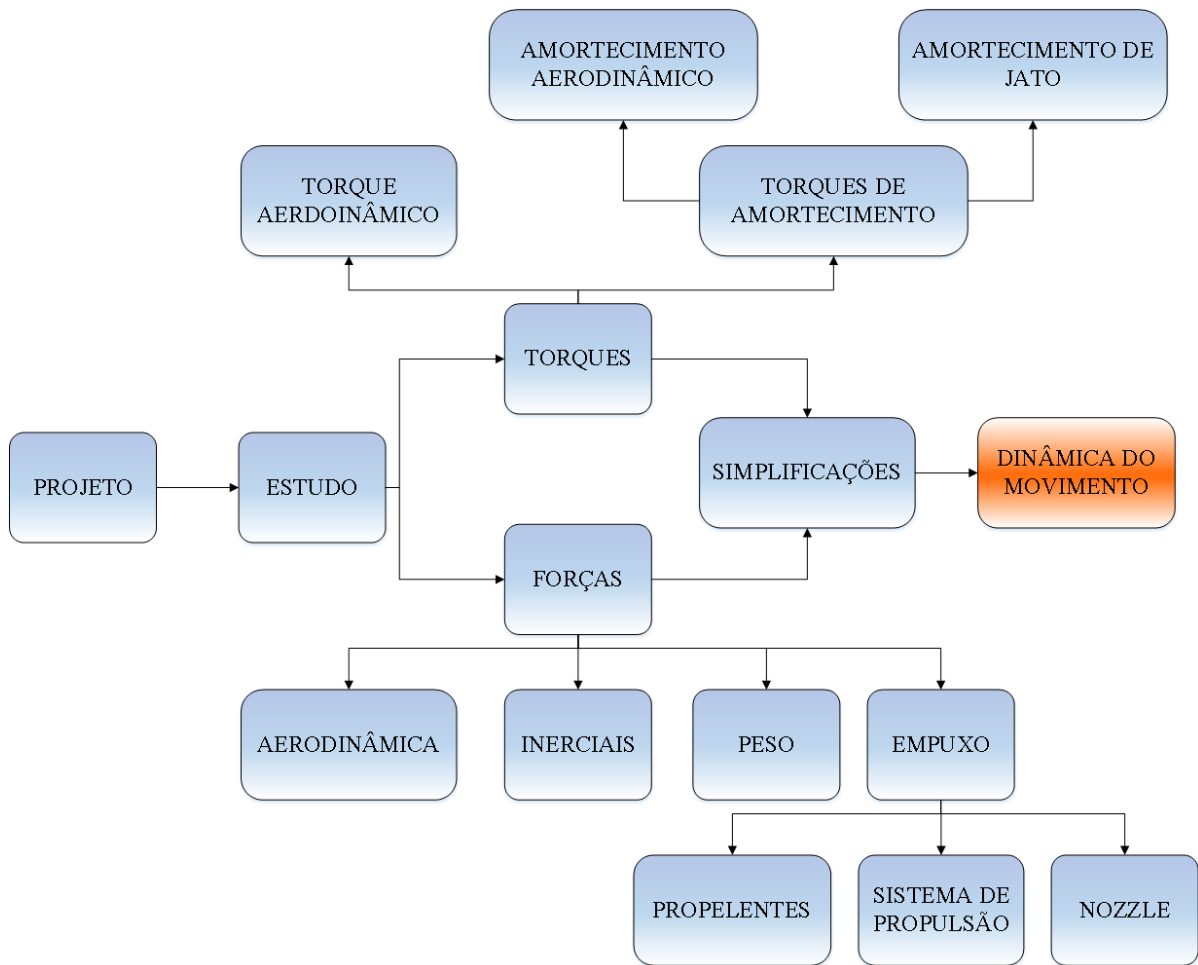


Figura 2.14 – Taxonomia da sequência de desenvolvimento do projeto do foguete.

2.5 CONCEPÇÃO FÍSICO-MATEMÁTICA DO MOVIMENTO E DINÂMICA DE FORÇAS

A dinâmica de lançamento e voo destes veículos está baseada na lei da conservação dos momentos linear e angular, descrita por Newton (SUTTON e BIBLARZ, 2001). Estas leis indicam que ao expelir uma quantidade de gases em um sentido, o foguete adquirirá uma aceleração no sentido contrário ao de saída destes gases, conforme apresenta a Equação (2.2).

$$\vec{P} = M\vec{v}_f + m\vec{u}_e = 0 \quad (2.2)$$

Para que haja conservação do momentum linear, o foguete desloca-se no sentido oposto com tal velocidade que, multiplicada pela massa total do foguete naquele instante, o valor de sua quantidade de movimento é igual à quantidade de movimento dos gases expelidos.

À medida que o propelente é queimado o foguete é acelerado, aumentando sua velocidade. Se a última parcela de massa de propelente for queimada no instante de tempo

$t_n = n - 1$ a velocidade máxima poderá ser calculada pela Equação (2.3).

$$|\vec{v}_n| = m |\vec{u}_e| \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{M - im} \right) \quad (2.3)$$

em que $|\vec{v}_n|$ é a velocidade final após a queima da última parcela de massa de propelente; m é a massa de propelente; $|\vec{u}_e|$ é a velocidade de exaustão dos gases e M é a massa total do foguete.

Mesmo tendo a gravidade e a resistência do ar como forças impeditivas ao movimento, a energia mecânica sempre se conserva. Energia está sendo passada para as partículas do ar, isso não implica numa desaceleração abrupta do veículo. Ele continuará seu movimento baseado no princípio da Primeira Lei de Newton. A trajetória segue uma função do segundo grau como mostra a Equação (2.4), caracterizando parábola, assim ilustrada pela Figura 2.2.

$$y(t) = y_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad (2.4)$$

em que $y(t)$ representa a altitude máxima relativa a $|\vec{v}_n|$; y_0 é a altitude em que se encontra o plano de lançamento; Δt a variação de tempo entre o instante inicial de queima e o instante final de queima; v_0 é a velocidade inicial do foguete e a é a aceleração do foguete.

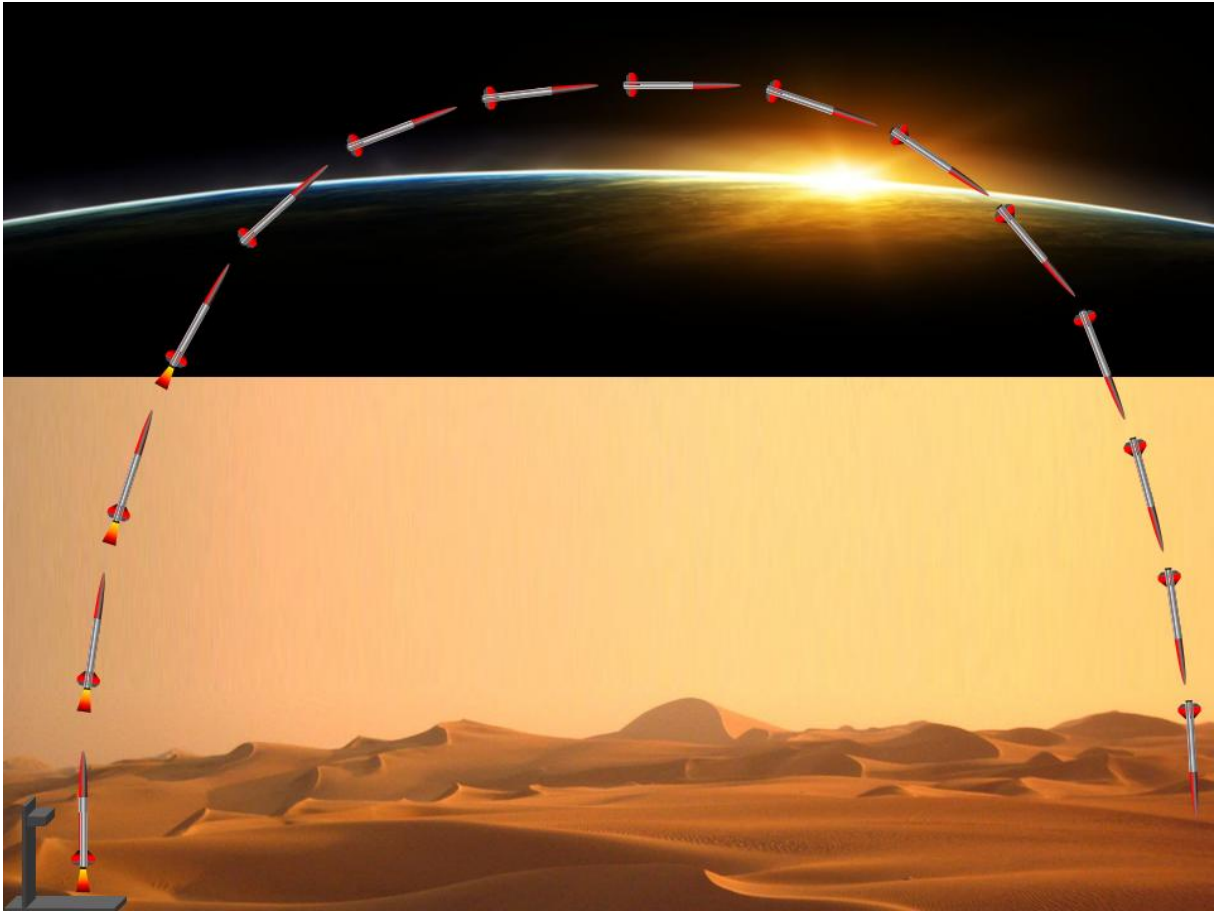


Figura 2.15 – Trajetória parabólica de um foguete.

As Leis de Newton são válidas apenas para referenciais inerciais (MEIROVITCH, 1970) e (GOLDSTEIN, SAFKO e POOLE JR, 2001). Para isso um sistema de referência é definido de maneira que todos os vetores de forças e momentos possam ser representados neste sistema. Geralmente dois triedros são posicionados, sendo um no referencial inercial e outro no referencial corpo. Como os sensores estão localizados no corpo e, portanto, as medidas são realizadas nele, toda a dinâmica é representada no triedro do corpo. No caso do VLS, por exemplo, adotou-se um triedro inercial na plataforma de lançamento e outro triedro no centro de massa do veículo.

As forças que atuam sobre um veículo em voo são: empuxo, força aerodinâmica, força gravitacional e forças de controle (SUTTON e BIBLARZ, 2001). No caso de veículos propulsados, utiliza-se o empuxo para causar-lhe aceleração ou desaceleração, forças de arrasto ou mudar a direção de voo (rotação e translação) por meio da técnica do TVC. *Thrust Vector Control* (TVC) é o método o qual

aeronaves, foguetes ou outros veículos manipulam a direção do fluxo de gases expelidos pelo motor, a fim de controlar a atitude ou a velocidade angular do veículo. Na Figura 2.5 estão representados os vetores das forças atuantes em um foguete e o vetor velocidade do corpo, relativo à superfície do corpo.

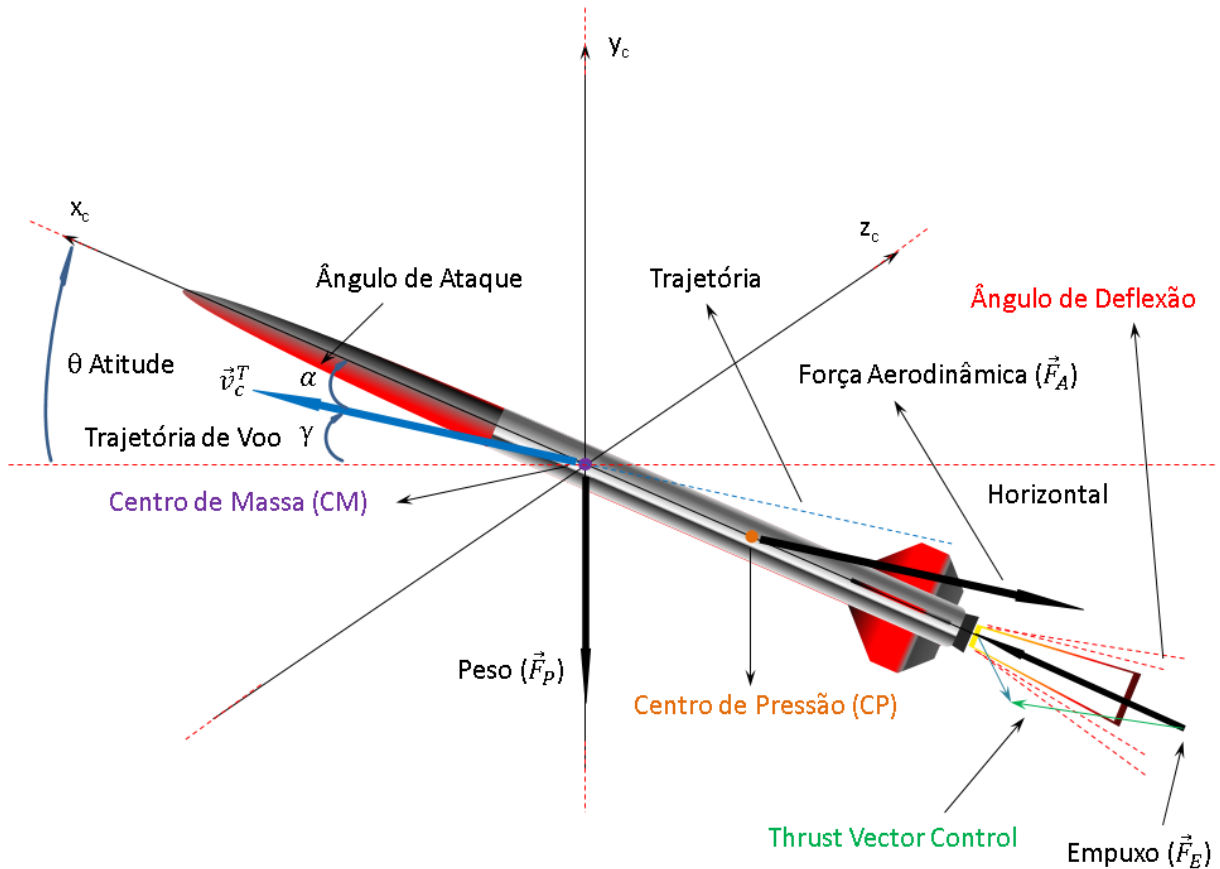


Figura 2.16 – Diagrama de forças que atuam num foguete em voo.

As forças que atuam em um foguete estão representadas pela Equação (2.5):

$$\sum \vec{F}_c = \vec{F}_E + \vec{F}_G + \vec{F}_A , \quad (2.5)$$

em que \vec{F}_c é a representação vetorial das forças relativamente conhecidas² atuantes no corpo; \vec{F}_E é o vetor força de empuxo do foguete; \vec{F}_G é o vetor força gravitacional e \vec{F}_A é o vetor força aerodinâmica.

O empuxo é a força que gera o movimento do veículo, atuando na direção do eixo longitudinal (SUTTON e BIBLARZ, 2001). Em foguetes a propelente líquido a taxa de consumo de massa \dot{m} do propulsor é essencialmente constante e os transientes de partida e parada são muito curtos e podem ser desprezados (SUTTON e BIBLARZ, 2001). O vetor força de empuxo é representado pela Equação (2.6).

$$\vec{F}_E = \dot{m}\vec{u}_e + (p_i - p_a)A_e \quad (2.6)$$

em que \vec{F}_E representa a força de empuxo; \dot{m} representa a taxa de massa; \vec{u}_e representa a velocidade de exaustão dos gases; p_i representa a pressão interna a câmara de combustão; p_a representa a pressão ambiente e A_e representa a área de saída dos gases pelo *nozzle*.

A força aerodinâmica surge em virtude do diferencial de pressão entre o foguete e o ar. Se não houver nenhum movimento relativo, não haverá força aerodinâmica (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979). Ela é proporcional à velocidade do corpo relativa ao vento ($\vec{F}_A \propto \vec{v}_c^v$) e varia em função do ângulo de ataque, que é o ângulo entre o eixo do veículo e o vetor velocidade na direção do voo. A força aerodinâmica está localizada no triedro aerodinâmico caracterizando duas componentes de sustentação e uma de arrasto.

² Sabe-se de imediato de sua atuação, dado que o corpo tem massa e encontra-se sujeito a aceleração gravitacional, sofre interação por meio do fluido o qual encontra-se imerso através de uma pressão dinâmica, sendo impulsionado por meio de um dispositivo propulsor. Porém, dada certas condições, podem surgir forças “fictícias” no movimento, causadas por movimento relativo e rotacional.

As forças de sustentação ($\vec{F}_{A_{y_c}}$ e $\vec{F}_{A_{z_c}}$) são forças aerodinâmicas decompostas no triedro do corpo, ambas normais ao eixo longitudinal do foguete. O arrasto ($\vec{F}_{A_{x_c}}$) é a força aerodinâmica decomposta no triedro do corpo e tem sentido oposto ao da trajetória de voo. Ela surge devido à resistência do movimento do corpo para com o fluido (ar). Todas as três são expressas como funções da área característica da superfície A , da pressão dinâmica de voo, onde esta, por sua vez, é função da velocidade do corpo relativa ao vento \vec{v}_c^v e da densidade de massa do fluido (ρ) em que o veículo se move (SUTTON e BIBLARZ, 2001). A Equação (2.7) mostra o vetor força aerodinâmica.

$$\vec{F}_A = \frac{1}{2} C_L \rho A \vec{v}_c^v{}^2 \quad (2.7)$$

em que \vec{F}_A é o vetor força aerodinâmica; C_L representa o coeficiente de sustentação; ρ representa a densidade de massa do fluido; A representa a área do plano de referência e \vec{v}_c^v representa a velocidade do corpo relativa ao vento.

Para veículos dispostos de asas, a área considerada será a área da asa. No caso de mísseis e veículos lançadores, que geralmente não possuem asa, a área considerada será a máxima seção transversal perpendicular ao eixo dos mísseis.

Outra força inerente ao problema é a força gravitacional devido a interação entre o corpo e a aceleração gravitacional. (SUTTON e BIBLARZ, 2001). Em voos espaciais, alguns outros campos gravitacionais, além do terrestre, podem atuar no veículo e devem ser considerados. No entanto, se o voo for executado na superfície na Terra a ação gravitacional dos demais corpos pode ser desconsiderada (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979). Neste caso a força exercida sobre o veículo, conhecida por força peso, é expressa conforme mostra a Equação (2.8).

$$\vec{F}_G = \vec{F}_p = M\vec{g}, \quad (2.8)$$

em que \vec{F}_G representa o vetor força gravitacional; \vec{F}_p representa o vetor força peso; M é a massa total do foguete e \vec{g} o vetor aceleração da gravidade.

A distribuição de massa na Terra não é homogênea e o formato geométrico do planeta não é esférico, os polos terrestres são achatados, e devido a estes

características, o valor da aceleração gravitacional varia (GOLDSTEIN, SAFKO e POOLE JR, 2001) com a razão inversamente proporcional ao quadrado da distância, como mostra a Equação (2.9).

$$g \propto \frac{1}{R^2} , \quad (2.9)$$

em que R representa o valor do raio da Terra.

Se R_0 for o raio da Terra e g_0 a aceleração gravitacional efetiva a este raio, define-se a aceleração gravitacional local pela Equação (2.10).

$$g_0 \propto \frac{1}{R_0^2} , \quad (2.10)$$

Dividindo a Equação (2.10) pela Equação (2.9), tem-se a aceleração gravitacional para qualquer região do planeta e pode ser calculada conforme mostra a Equação (2.11).

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{R^2} , \quad (2.11)$$

A Equação (2.11) representa, de forma simplória, o valor da aceleração da gravidade em qualquer região localizada na superfície da Terra.

2.5.1 SISTEMAS DO CORPO E ÂNGULOS DE EULER

De acordo com o primeiro postulando da relatividade restrita:

“Princípio da relatividade especial: Se um sistema de coordenadas K é escolhido de tal forma que, em relação a ele, as leis da física se apresentam com a forma mais simples, as mesmas leis são válidas em relação a qualquer outro sistema de coordenadas K' se movendo em translação uniforme em relação a K ” (EINSTEIN, LORENTZ, et al., 1952).

Um sistema inercial de referência é um sistema de coordenadas associado a algumas características envolvidas no deslocamento dos corpos relativo ao seu

ponto de partida. No caso de foguetes, por exemplo, se a variação entre a posição do referencial adotado como inercial e o veículo for considerada desprezível, este será considerado um referencial inercial. Todavia, se durante o tempo de voo do veículo houver grande variação de posição do referencial de lançamento relativo ao deslocamento do veículo, este será um referencial não inercial. Em poucas palavras, referencial inercial é aquele cujo qual sua posição não varia ou varia muito pouco em relação ao deslocamento do veículo (GOLDSTEIN, SAFKO e POOLE JR, 2001) (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979). Em casos de missões espaciais onde o movimento de rotação terrestre não pode ser negligenciado, escolhe-se como referencial inercial alguma estrela bem distante, onde a variação da posição da estrela é irrelevante relativa à nave. No caso de um foguete que possui um tempo de voo pequeno, o movimento da Terra pode ser considerado irrelevante. A origem do sistema e a fixação do triedro inercial, neste caso, tem como origem o centro de massa da Terra ou transladado para o centro de outro sistema, como a plataforma de lançamento que encontra-se fixada sobre a superfície da Terra, e, portanto, não se move relativamente ao centro de massa do planeta. Este é chamado sistema referencial topocêntrico. Em outras palavras, a origem dos eixos não está localizado no centro de massa da Terra, mas sim na plataforma de lançamento. (BRYIS, 2008). A Figura 2.17 mostra os diferentes triedros de referência.

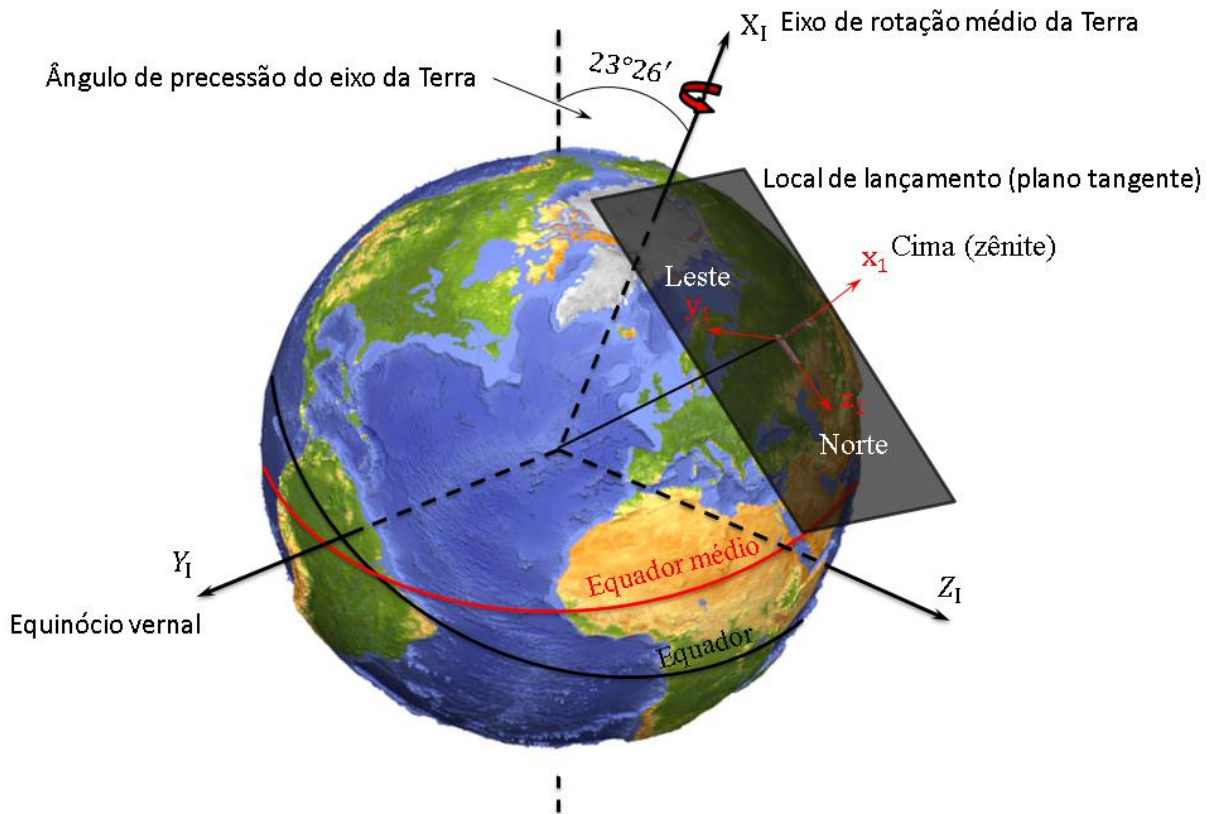


Figura 2.17 – Coordenadas do sistema inercial localizado no centro da Terra representados por $(X_I; Y_I; Z_I)$ e sistema topocêntrico localizado no plano tangente de lançamento representados $(x_1; y_1; z_1)$.

Os foguetes também possuem movimento de rotação, o que viabiliza a utilização dos ângulos de Euler para especificar a orientação do corpo girante em relação ao sistema inercial.

Supondo um foguete parado sobre a superfície de lançamento, os triedros do corpo encontram-se alinhados com o triedro da plataforma. Quando o foguete começa a subir e executar suas manobras de apontamento, o triedro do corpo desloca-se do triedro inercial (topocêntrico), todavia qualquer movimentação do veículo estará orientada baseada aos referenciais do triedro da plataforma, conforme visto na Figura 2.18.

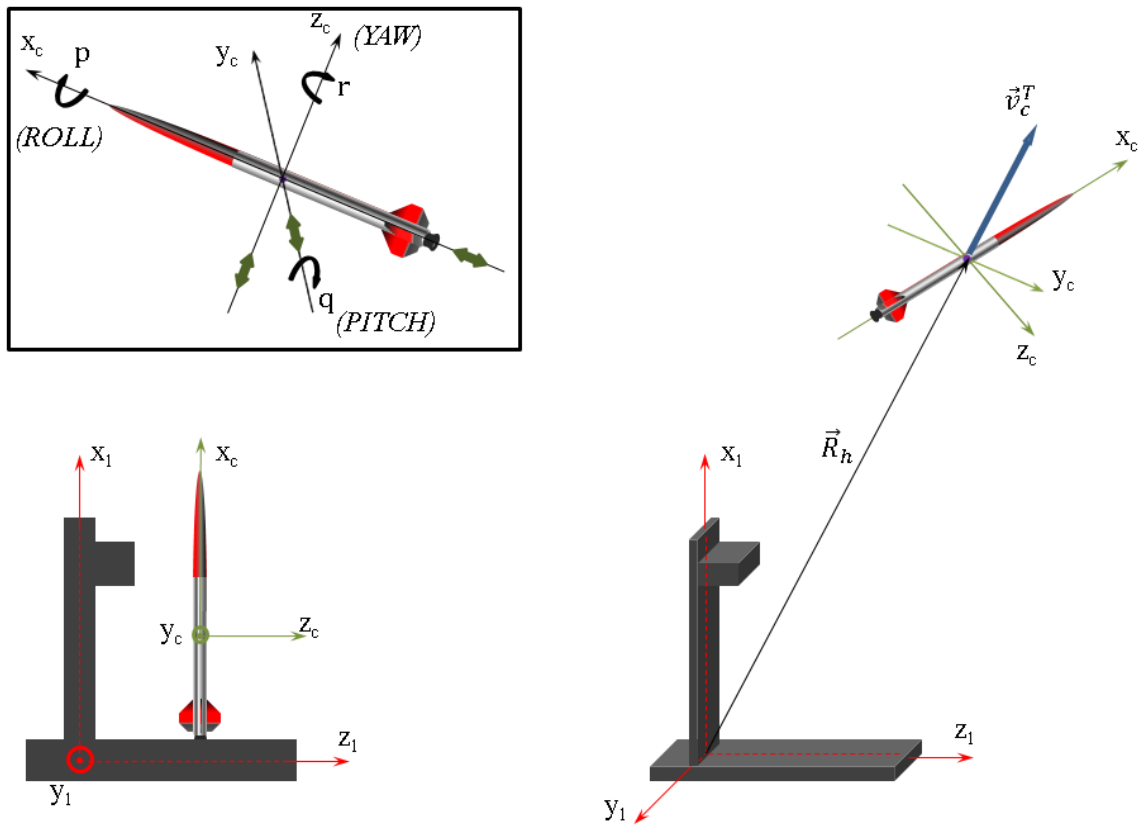


Figura 2.18 – Triedro inercial e triedro do corpo. Representações angulares dos movimentos de rotação e translação ao redor dos eixos do foguete.

O triedro fixo no corpo pode rotacionar sobre seus três eixos. A rotação sobre o eixo longitudinal é denominada *ROLL* ou rolamento, sobre o eixo vertical é *YAW* ou arfagem e sobre o eixo lateral é *PITCH* ou picagem/cabragem.

Os ângulos de Euler são apresentados pela Figura 2.19.

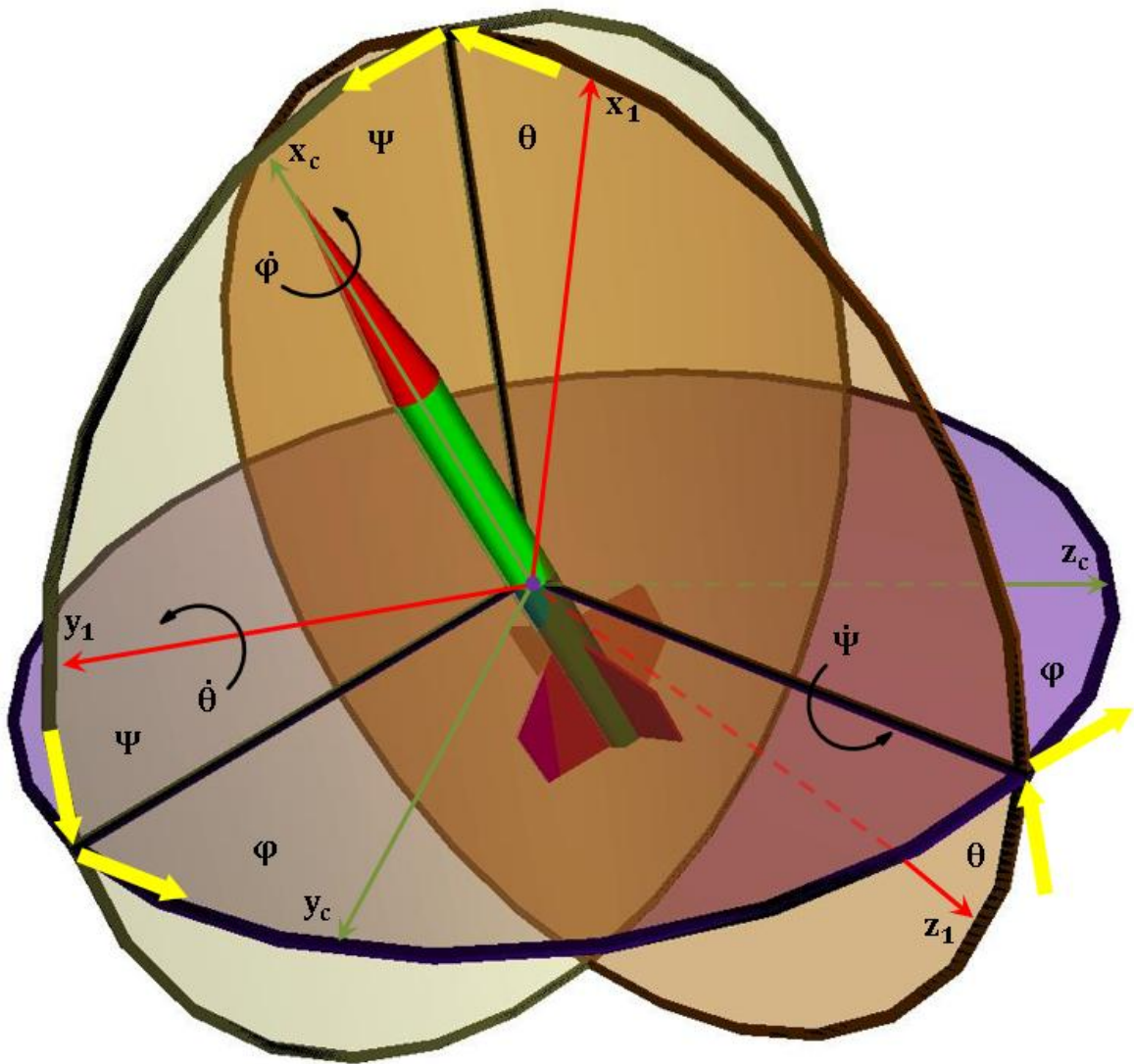


Figura 2.19 – Rotação do triedro inercial sobre os ângulos de Euler e representação dos planos de rotação do foguete.

A matriz de transformação é dada pela Equação (2.12), (2.13) e (2.14).

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \Theta^{\mathcal{C}/\mathcal{I}} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \operatorname{sen} \psi & -\operatorname{sen} \theta \cos \psi \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi - \cos \theta \operatorname{sen} \psi \cos \varphi & \cos \psi \cos \varphi & \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi & -\cos \psi \operatorname{sen} \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} & \frac{-\sin \varphi}{\cos \psi} \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 1 & -\cos \varphi \tan \psi & \sin \varphi \tan \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

em que φ é o ângulo do movimento de *ROLL*; θ é o ângulo do movimento de *PITCH* e ψ é o ângulo do movimento de *YAW*.

A matriz de rotação é definida sobre dois sistemas quaisquer, desde que um deles seja um referencial parado e o outro em movimento.

2.5.2 FORÇA DE EMPUXO E TORQUES DE CONTROLE

A força de empuxo (\vec{F}_E) é a reação causada no foguete devido à queima de propelente e esta pode ser considerada constante ou variável. Quando o propelente encontra-se em estado líquido a queima pode ser controlada por meio da injeção de oxidante e combustível na câmara de combustão. A utilização da técnica do *Thrust Vector Control* é facilitada por se tratar de uma queima controlada e o empuxo pode ser mantido constante ou variável. A variação do empuxo pode ser definida por meio da geometria do grão do propelente, homogeneidade da mistura (oxidante, combustível e aditivo) e bolhas de ar internas no propelente. Estes fatores, com exceção da geometria do grão podem ser minimizados, mas não totalmente excluídos e afetam diretamente a queima e conseqüentemente o empuxo (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979). Estas pequenas variações do empuxo não foram levadas em conta durante as considerações deste projeto. Se a tubeira sofrer uma deflexão angular de β_z e β_y relativa à x_c a força de empuxo varia conforme mostra a Figura 2.20.

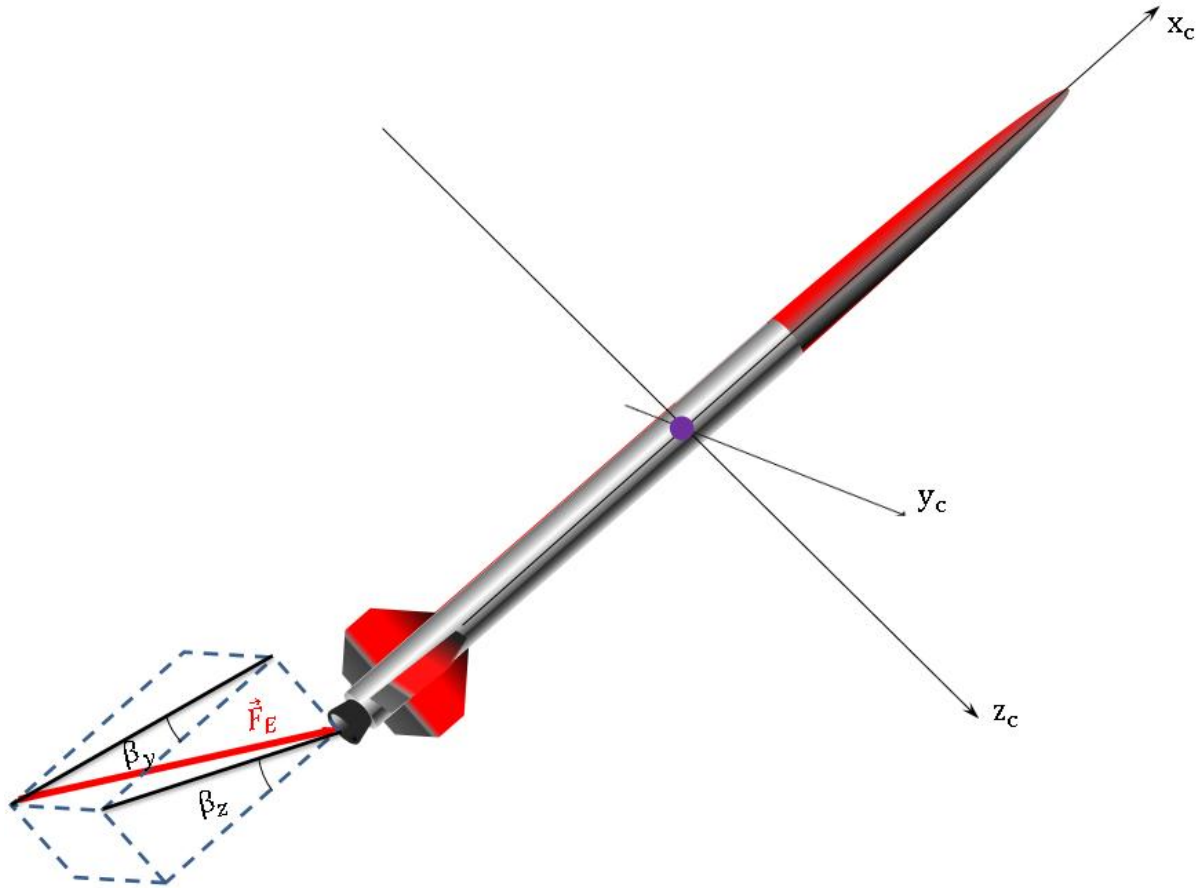


Figura 2.20 – Interferência da deflexão da tubeira na força de empuxo.

O modelo matemático para a força de empuxo em x_c é descrito pela Equação (2.15).

$$F_{E_{x_c}} = F_E \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \beta_y \cos^2 \beta_z}{1 - \text{sen}^2 \beta_y \cos^2 \beta_z} - \frac{\cos^2 \beta_y \text{sen}^2 \beta_z}{1 - \cos^2 \beta_y \text{sen}^2 \beta_z}}, \quad (2.15)$$

O modelo matemático para a força de empuxo em y_c é descrito pela Equação (2.16).

$$F_{E_{y_c}} = F_E \frac{\text{sen} \beta_y \cos \beta_z}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \beta_y \cos^2 \beta_z}}, \quad (2.16)$$

O modelo matemático para a força de empuxo em z_c é descrito pela Equação (2.17).

$$F_{E_{z_c}} = F_E \frac{\cos \beta_y \text{sen} \beta_z}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta_y \text{sen}^2 \beta_z}}, \quad (2.17)$$

em que: $F_{E_{x_c}}$ representa a força de empuxo sobre o eixo x_c ; $F_{E_{y_c}}$ representa a força de empuxo sobre o eixo y_c ; $F_{E_{z_c}}$ representa a força de empuxo sobre o eixo z_c e F_E é o módulo da força de empuxo.

Como este trabalho trata-se de um foguete, cuja tubeira não sofrerá deflexão, os ângulos β_z e β_y são considerados nulos, havendo apenas uma componente da força de empuxo, sobre o eixo longitudinal do foguete (x_c), como mostra a Equação (2.18)

$$\vec{F}_E = \begin{bmatrix} F_{E_{x_c}} \\ F_{E_{y_c}} \\ F_{E_{z_c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

2.5.3 FORÇA PESO E TORQUE DA FORÇA PESO

O tempo de voo do veículo é considerado pequeno, poucos segundos, e o deslocamento do foguete é considerado dentro da vizinhança da Terra, assim o foguete está sujeito à força de atração gravitacional, que neste caso pode ser definida como força peso. Como a distribuição de massa sobre a superfície do planeta é não homogênea e o formato geométrico da Terra não é considerado uma esfera perfeita (formato de uma geóide) o potencial gravitacional é variável. Todavia, baseado na consideração acima a respeito do tempo de voo e do deslocamento do veículo, considera-se a área formada abaixo do plano de voo como sendo uma superfície plana quando comparada com as dimensões do raio da Terra. Essa aproximação permite que o módulo da força peso seja considerado constante durante as fases de voo.

No referencial (inercial) topocêntrico, quando as coordenadas do triedro do corpo são coincidentes com as coordenadas do triedro inercial, o vetor da força peso pode ser definido pela Equação (2.19).

$$\vec{F}_{P_T} = \begin{bmatrix} -Mg \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Onde \vec{F}_{P_T} é a componente vetorial da força peso na base de lançamento e g é a aceleração da gravidade na superfície da Terra.

À medida que o veículo avança em voo e manobra sobre seus eixos a força peso varia vetorialmente e a componente \vec{F}_{P_T} não será mais a mesma de quando o foguete encontrava-se disposto sobre a plataforma. Como o vetor atua sobre o CM do foguete e o triedro do corpo está definido sobre o CM em movimento, um novo vetor \vec{F}_{P_c} representará a posição da força peso sobre o triedro do corpo de forma que seus componentes estejam decompostos de acordo com a matriz de rotação baseada nos ângulos de Euler. A Figura 2.21 a) apresenta a componente da força peso na plataforma de lançamento e em b) a componente da força peso do foguete durante o voo.

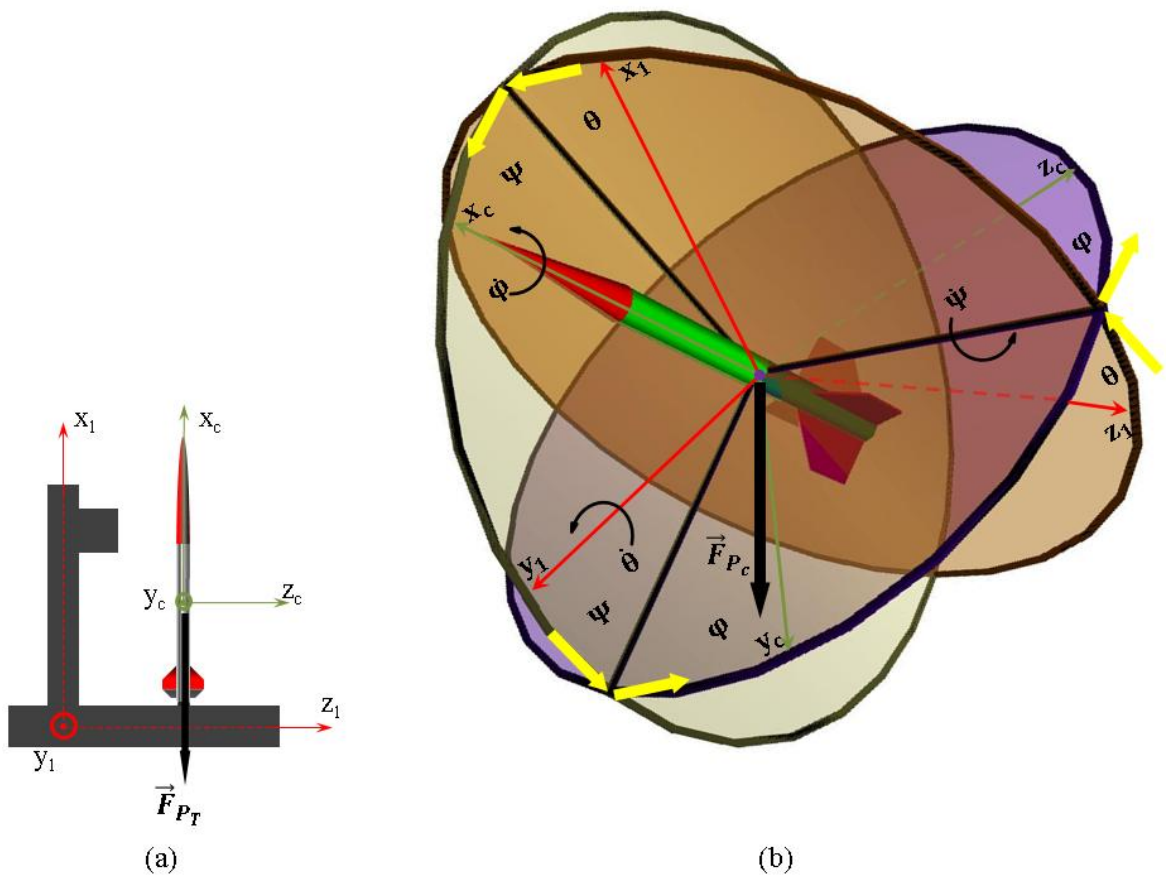


Figura 2.21 – Representação da força peso sobre a plataforma de lançamento e sobre o referencial relativo ao triedro do corpo.

Desta forma, a transformação das coordenadas da força peso ao longo dos eixos do corpo em voo é dada pela Equação (2.20).

$$\vec{F}_c = \Theta^c \vec{F}_T \quad (2.20)$$

$$\vec{F}_{P_c} = \begin{bmatrix} F_{P_{x_c}} \\ F_{P_{y_c}} \\ F_{P_{z_c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg (\cos \psi \cos \theta) \\ -mg (\text{sen} \theta \text{sen} \varphi - \cos \theta \text{sen} \psi \cos \varphi) \\ -mg (\text{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \text{sen} \psi \text{sen} \varphi) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Fazendo $\varphi = 0$ e ψ pequeno (LEITE FILHO, 2011).

$$\cos \psi = \cos \varphi = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{sen} \varphi \cong \varphi \quad (2.23)$$

$$\text{sen} \psi \cong \psi \quad (2.24)$$

Aplicando as condições angulares na Equação (2.21) chega-se a Equação (2.25).

$$\vec{F}_p = \begin{bmatrix} -Mg (\cos \theta) \\ Mg (\psi \cos \theta) \\ -Mg (\text{sen} \theta) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Para θ pequeno (LEITE FILHO, 2011).

$$\cos \theta = 1 \quad (2.26)$$

$$\text{sen} \theta \cong \theta \quad (2.27)$$

Reescrevendo a Equação (2.25).

$$\vec{F}_{P_c} = \begin{bmatrix} -Mg \\ Mg\psi \\ -Mg\theta \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

O torque da força peso está associado ao potencial gravitacional gerado pela não homogeneidade e pelo formato de geoide do planeta Terra. Isso condiciona um campo gravitacional variável afetando diretamente a intensidade do campo da força g , ou seja, o campo não é considerado como sendo constante (GREENSITE, 1970) (GOLDSTEIN, SAFKO e POOLE JR, 2001). Como a Terra não é homogênea, o corpo sentirá a intensidade deste campo distribuída sobre seu corpo. A diferença de posição entre o CM e o CG causará um braço de alavanca, o que ocasionará um torque pela força gravitacional.

No caso de pequenos foguetes, com curta duração de voo, considera-se a Terra como sendo localmente plana e com distribuição homogênea de massa para evitar complicações de cálculo. Esta simplificação é satisfatória para estes veículos. Para o caso de veículos lançadores e ICBMs a trajetória do voo dos primeiros estágios podem, em geral, considerar a Terra como sendo plana. Porém, para as fases

superiores, a velocidade será tão grande que esta aproximação vai levar a desvios da trajetória real.

Para este trabalho será considerado a Terra como sendo plana e homogênea e portanto, não haverá torques gravitacionais.

2.5.4 FORÇAS AERODINÂMICAS E TORQUES AERODINÂMICOS

As forças aerodinâmicas surgem devido ao escoamento do fluxo de ar em volta da estrutura do veículo (ROSKAN, 2001). Estas forças dependem de vários parâmetros, como velocidade do corpo, ângulos de ataque e derrapagem, geometria do veículo, temperatura, entre outros. É conveniente usar coeficientes aerodinâmicos adimensionais para representar os efeitos destes parâmetros (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979). Como um lançador na fase de voo atmosférico voa quase na vertical, com manobras de ângulos de ataque e derrapagem menores que 15° , pode-se linearizar os coeficientes aerodinâmicos (ETKIN e REID, 1995) como mostra a Equação (2.29) e Equação (2.30)

$$C_{n_\alpha} = \frac{d}{d\alpha} C_n \Big|_{\alpha=0} \quad (2.29)$$

$$C_{n_\beta} = \frac{d}{d\beta} C_n \Big|_{\beta=0} \quad (2.30)$$

O foguete pode ser considerado simétrico, $C_{n_\alpha} = C_{n_\beta}$. Tal simplificação é conveniente, pois manobras maiores são feitas na fase não atmosférica onde os efeitos aerodinâmicos não aparecem.

Os ângulos de ataque e derrapagem e as componentes das forças aerodinâmicas encontram-se dependentes da componente do vetor velocidade do corpo em relação ao vento \vec{v}_c^v . Desta forma, para que sejam definidos esses elementos, primeiramente será escrito o vetor que representa a velocidade do vento relativo ao sistema geocêntrico local \vec{v}_v^T . Após uma combinação entre os vetores velocidade do vento relativo ao corpo do foguete e velocidade do vento relativo ao sistema geocêntrico local, são determinadas as componentes do vetor velocidade do vento relativo ao foguete. O vetor que representa a velocidade do vento em relação ao sistema geocêntrico local (GREENSITE, 1970) é dado pela Equação (2.31).

$$\vec{v}_v^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_{v_N} \\ v_{v_E} + R_0 \Omega_E \cos \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Por meio de uma diferença vetorial entre os vetores velocidade do corpo em relação ao sistema terrestre e o vetor velocidade do vento relativa ao sistema geocêntrico, define-se a Equação (2.33).

$$\vec{v}_c^v = \vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -v_{v_N} \\ v_{v_E} + R_0 \Omega_T \cos \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\vec{v}_c^v = \begin{bmatrix} u \\ v + v_{v_N} \\ w - v_{v_E} - R_0 \Omega_T \cos \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

em que v_{v_N} é a velocidade do vento na direção norte; v_{v_E} é a velocidade do vento na direção leste; R_0 é o vetor posição do centro da Terra à origem do sistema do triedro do corpo; Ω_T é a velocidade angular da Terra e Γ_2 a latitude.

O módulo do \vec{v}_c^v será definido conforme a Equação (2.33).

$$|\vec{v}_c^v| = \left[(u)^2 + (v + v_{v_N})^2 + (w - v_{v_E} - R_0 \Omega_T \cos \Gamma_2)^2 \right]^{1/2} \quad (2.34)$$

O módulo de \vec{v}_c^v definirá os ângulos de ataque e derrapagem conforme a Equação (2.35) e a Equação (2.36), respectivamente.

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left(\frac{w - v_{v_E} - R_0 \Omega_T \cos \Gamma_2}{|\vec{v}_c^v|} \right) \quad (2.35)$$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{v + v_{v_N}}{|\vec{v}_c^v|} \right) \quad (2.36)$$

Ao chocar-se com o foguete, o vento produz um efeito denominado pressão dinâmica (ROSKAN, 2001). Seu cálculo é dado conforme apresenta a Equação (2.37).

$$P_{din} = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|^2 \quad (2.37)$$

A força aerodinâmica atua no CP e pode ser apresentada no eixo x_A do triedro aerodinâmico do corpo. Quando decomposta no triedro do corpo, as projeções da força aerodinâmica para cada coordenada (x_c, y_c, z_c), será representada por uma força de arrasto e duas forças de sustentação: uma no plano de *YAW* e a outra no plano de *PITCH* (GREENSITE, 1970) (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979) (ROSKAN, 2001). As projeções da força aerodinâmica para cada eixo do triedro do corpo podem escritas conforme apresenta a Figura 2.22.

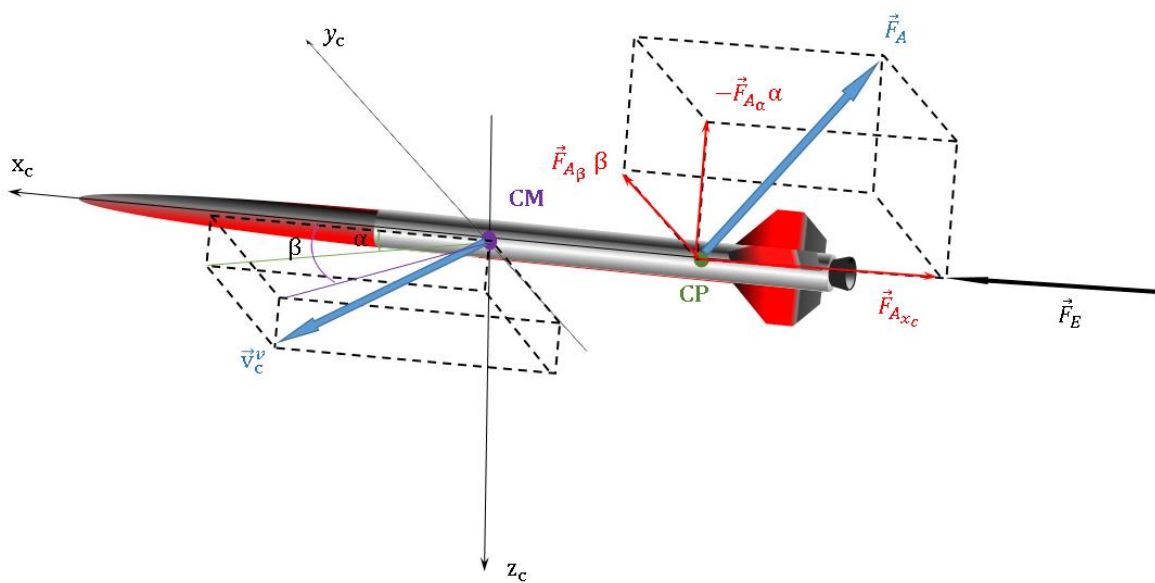


Figura 2.22 – Velocidade relativa do vento ao corpo e a componente vetorial da força aerodinâmica atuante sobre o triedro aerodinâmico e suas decomposições no triedro do corpo.

A decomposição da força aerodinâmica sobre o eixo x_c é dada pela Equação (2.38), com coeficiente de arrasto $C_D \cong cte$.

$$F_{A_{x_c}} = -C_D P_{din} A_R \quad (2.38)$$

Onde $F_{A_{x_c}}$ é a força de arrasto e A_R é a área de referência para *ROLL*.

A decomposição da força aerodinâmica sobre o eixo y_c é dada pela Equação (2.39).

$$F_{A_{y_c}} = F_{A_\beta} = \left\{ P_{din} A_Y \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta} [C_{L\beta}(l)] dl \right\} \beta \quad (2.39)$$

Onde $F_{A_{y_c}}$ é a força de sustentação relativa ao eixo y_c ; A_Y é a área de *YAW* e $C_{L\beta}$ é o coeficiente de sustentação relativo ao ângulo β .

A decomposição da força aerodinâmica sobre o eixo z_c é dada pela Equação (2.40).

$$F_{A_{z_c}} = -F_{A_\alpha} = - \left\{ P_{din} A_P \int_0^L \frac{\partial}{\partial \alpha} [C_{L\alpha}(l)] dl \right\} \alpha \quad (2.40)$$

Onde $F_{A_{z_c}}$ é a força de sustentação relativa ao eixo z_c ; A_P é a área de *PITCH* e $C_{L\alpha}$ é o coeficiente de sustentação relativo ao ângulo α .

A força aerodinâmica será escrita conforme a Equação (2.41).

$$\begin{bmatrix} F_E \\ F_E \beta_y \\ F_E \beta_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \\ mg\psi \\ -mg\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_D P_{din} A_l \\ \left\{ P_{din} A_Y \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta} [C_{L\beta}(l)] dl \right\} \beta \\ - \left\{ P_{din} A_P \int_0^L \frac{\partial}{\partial \alpha} [C_{L\alpha}(l)] dl \right\} \alpha \end{bmatrix} = M \frac{d}{dt} \vec{v} \quad (2.41)$$

O braço existente entre o distanciamento do CP e do CM gera um torque e este é o torque da força aerodinâmica (ROSKAN, 2001). O torque aerodinâmico no plano de *YAW* é proporcional a força de sustentação a este plano e será apresentado na Figura 2.23.

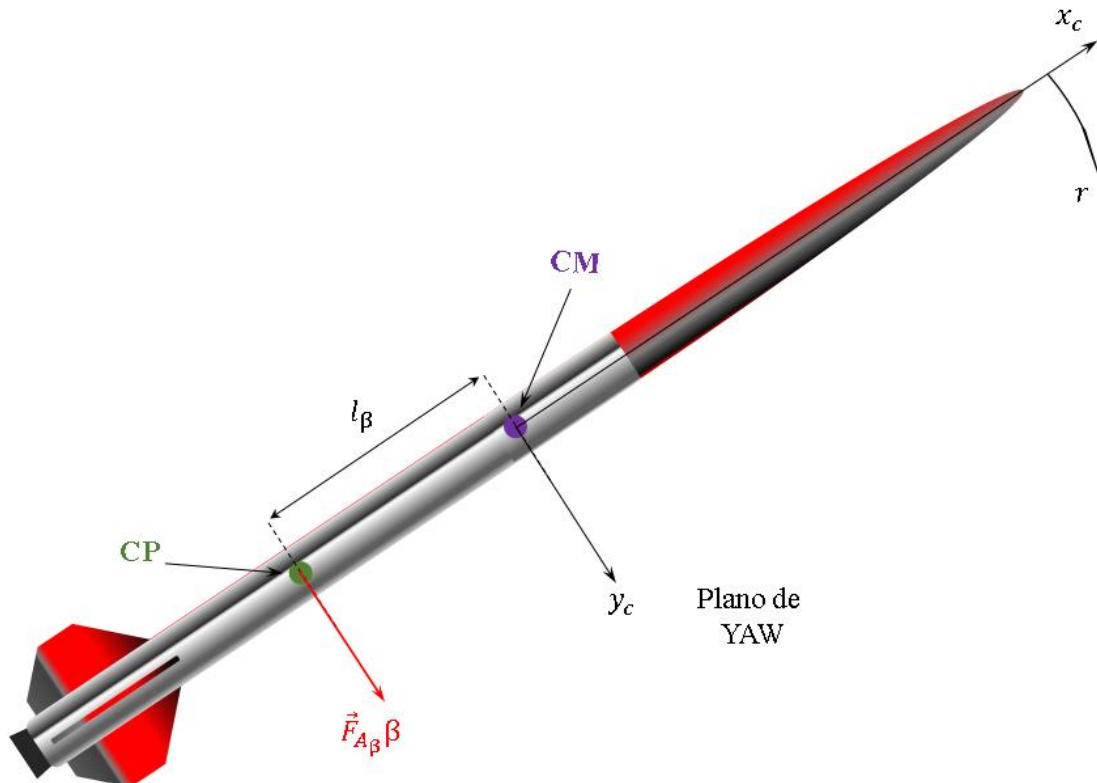


Figura 2.23 – Torque aerodinâmico no plano de YAW causado pela força de sustentação relativa a este plano.

A força de arrasto não gera torque pois encontra-se atuante sobre o eixo longitudinal do corpo. O torque gerado pela força relativa ao plano de YAW é calculado pela Equação (2.42).

$$\tau_{A\beta} = - \left\{ P_{din} A_6 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta} [C_{L\beta}(l)] dl \right\} l_\beta \beta \quad (2.42)$$

Onde $\tau_{A\beta}$ é o torque em relação ao ângulo β ; A_6 é a área de referência e l_β é o braço de alavanca entre o CP e o CM.

O torque aerodinâmico no plano de PITCH é causado por uma força de sustentação proporcional a este plano e pelo braço de alavanca formado através da diferença de posição entre o CP e o CG do foguete, como mostra a Figura 2.24.

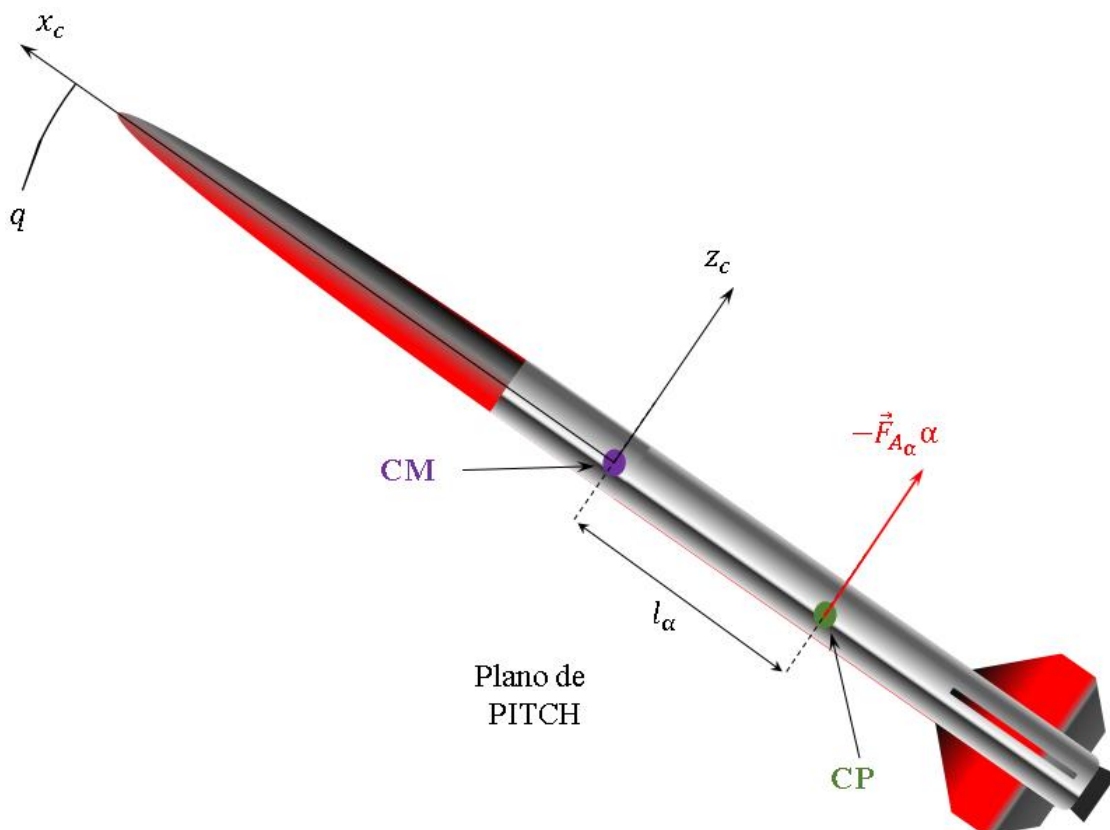


Figura 2.24 – Torque aerodinâmico no plano de *PITCH* causado pela força de sustentação relativa a este plano.

O torque gerado pela força relativa ao plano de *PITCH* é calculado pela Equação (2.43).

$$\tau_{A_\alpha} = \left\{ P_{din} A_5 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \alpha} [C_{L\alpha}(l)] dl \right\} l_\alpha \alpha \quad (2.43)$$

Onde τ_{A_α} é o torque em relação ao ângulo α ; A_5 é a área de referência e l_α é o braço de alavanca entre o CP e o CM.

O torque aerodinâmico é definido pela Equação (2.44).

$$\vec{\tau}_A = \begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_{A_\alpha} \\ \tau_{A_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left\{ P_{din} A_5 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \alpha} [C_{L\alpha}(l)] dl \right\} l_\alpha \alpha \\ - \left\{ P_{din} A_6 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta} [C_{L\beta}(l)] dl \right\} l_\beta \beta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Todas as forças estão projetadas no triedro do corpo.

2.5.5 AMORTECIMENTO AERODINÂMICO E AMORTECIMENTO DE JATO

Nenhum corpo está passível da ausência absoluta do movimento. Seja no macro ou micro, as partículas encontram-se em movimento e conseqüentemente suas posições variam. Algumas vezes estas variações de posição são tão pequenas, o movimento global do corpo é tão insignificante, que poderá ser tratado como corpo rígido. No entanto, assim que é dada a ordem de *lift off* (decolagem), o foguete troca uma quantidade imensa de energia com o fluido que o contém (ar). A inércia é proporcional a massa, todavia quanto maior for a massa do foguete maior deverá ser a força de empuxo para tira-lo do chão. Por possuir muito mais energia que o meio, a dissipação de energia ocorre, inicialmente, do foguete para o meio. A medida que o foguete cede energia para o ar, o ar, por sua vez, em constante choque com o foguete, retorna parte desta energia para o veículo, que por sua vez é absorvida pelas partículas do corpo. Esta absorção aumenta gradativamente a excitação intermolecular, o que reflete diretamente nos modos de flexão do corpo. Se a frequência de oscilação for coincidente a frequência natural o corpo se destruirá por completo devido à amplificação da onda. O vento é um agente externo que também atua como excitador destes modos de flexão, se a frequência da rajada de vento for a mesma que a frequência natural de vibração da estrutura.

O amortecimento aerodinâmico é responsável pela redução destas vibrações, atuando no foguete por meio de uma superfície de controle. O torque de amortecimento aerodinâmico é calculado conforme a Equação (2.45).

$$\vec{\tau}_{AA} = \begin{bmatrix} \tau_{AA_{x_c}} \\ \tau_{AA_{y_c}} \\ \tau_{AA_{z_c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-C_{Rp} P_{din} A_r I_r^2}{2 |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|} p \\ \frac{-C_{Yq} P_{din} A_r I_r^2}{2 |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|} q \\ \frac{-C_{Pr} P_{din} A_r I_r^2}{2 |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|} r \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Já o amortecimento de jato ou amortecimento de empuxo é causado pela retirada de energia do movimento angular, em torno do eixo de *ROLL* do foguete, por meio do efeito da exaustão dos gases. Se o foguete executa movimento em torno de *PITCH* ou *YAW*, então a exaustão precisa ser acelerada lateralmente para que possa seguir

o fluxo que atravessa o *nozzle*. Uma vez que os gases escapam pelo bocal, este impulso lateral é transportado para o veículo e, com isso, serve para amortecer as oscilações laterais. O torque de amortecimento de jato pode é calculado conforme a Equação (2.46).

$$\vec{\tau}_{AJ} = \begin{bmatrix} \tau_{AJ_{x_c}} \\ \tau_{AJ_{y_c}} \\ \tau_{AJ_{z_c}} \end{bmatrix} = \dot{m} \begin{bmatrix} 0 \\ ql_e^2 \\ rl_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

No momento de lançamento o amortecimento aerodinâmico é praticamente nulo já que a velocidade do foguete é baixa, enquanto que o amortecimento de jato é significativo devido a velocidade de escape dos gases.

O amortecimento minimiza as frequências de ressonância, já que ocorre a transferência de energia cinética, elástica ou vibracional de um sólido para o ar, numa região espectral onde o ar tem muito menos energia que o corpo.

2.5.6 ESTABILIDADE DE VOO

A estabilidade de voo é de suma importância, pois interfere diretamente na trajetória do foguete. Um dos principais fatores que devem ser observados para que um foguete seja aerodinamicamente estável é a posição relativa do CG ao CP. Esta posição relativa, interfere na construção das superfícies atuadoras externas ou internas que interfiram em sua atitude em voo. Se assim for, um veículo que sofre uma perturbação qualquer que o faça desviar da trajetória prescrita, a correção acontece por meio de um torque aerodinâmico que atua como um torque restaurador e alinha o foguete a trajetória proposta. Todavia, o comprimento do braço entre os centros possui um limite dimensional para que a região de estabilidade não seja mudada para uma região de super estabilidade, fazendo com que o torque gerado coloque o foguete na direção do vento. A condição onde o CP encontra-se a frente do CG é tida por instável já que o torque aerodinâmico fará com que o veículo se coloque em situação desgovernada de giro sobre o CG. Além das duas situações citadas anteriormente, existe a configuração de voo indiferente, cujo o CG e o CP encontram-se sobrepostos. Esta condição não gera torque algum ao foguete, a não

ser que haja um atuador externo que assim o deseje fazer. Todas as situações de estabilidade podem ser vistas, conforme mostra a Figura 2.25.

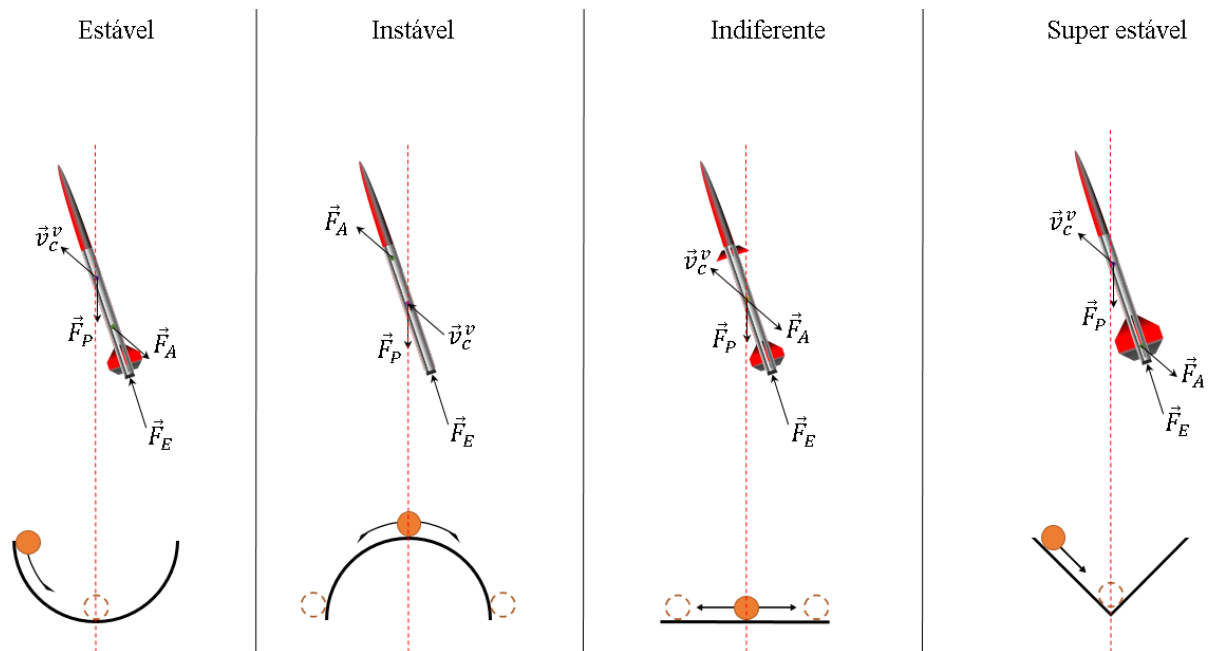


Figura 2.25 – Condições de estabilidade de voo.

A estabilidade do movimento aumenta com a rotação e isso facilita certos tipos de manobra, manutenção na trajetória e separação de estágios (WIE, 1998).

2.5.7 EQUACIONAMENTO DA DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

A mecânica clássica define um corpo rígido como sendo um conjunto finito, de n partículas de massas m_i e posições $r_i (i = 1:n)$, que ao ser submetido a um sistema de forças, a distância entre duas partículas i e j , $|r_i - r_j|$, é invariante no tempo (TARG, 1976) (GOLDSTEIN, SAFKO e POOLE JR, 2001).

A massa total do corpo rígido, M , é o somatório das massas das partículas como é mostrado na Equação (2.47).

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (2.47)$$

em que m_i é a massa de cada partícula do corpo.

2.5.7.1 DINÂMICA TRANSLACIONAL

De acordo com a variação do momento linear, pode-se escrever a equação que representa a dinâmica translacional do CM do corpo relativa à plataforma de lançamento. A Equação (2.48) apresenta a variação temporal do momento linear do foguete em relação à plataforma de lançamento.

$$\sum \vec{F}_c = \frac{d}{dt}(M \cdot \vec{v}_c^T) = \frac{d}{dt}M \cdot \vec{u}_e + M \frac{d}{dt}\vec{v}_c^T \quad (2.48)$$

Onde \vec{F}_c são as componentes vetoriais das forças que atuam sobre o corpo; \vec{v}_c^T é a componente vetorial da velocidade do foguete em relação ao referencial de lançamento e \vec{u}_e é a componente vetorial da velocidade de exaustão dos gases.

À medida que o foguete queima o propelente e libera a massa em forma de gases sua velocidade aumenta. A força gerada por essa queima é o empuxo e ele representa a variação de massa do foguete, vide Equação (2.49).

$$\frac{d}{dt}M \cdot \vec{u}_e = \vec{F}_E \quad (2.49)$$

Onde \vec{F}_E é a componente vetorial da força de empuxo.

Resolvendo o diferencial do vetor velocidade da Equação (2.48) chega-se a Equação (2.50).

$$M \frac{d}{dt}\vec{v}_c^T = M \frac{\delta}{\delta t}(\vec{v}_c^T) + 2M(\vec{\Omega}_c^T \times \vec{v}_c^T) + M \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_c^T) \times \vec{R}_h + M \vec{\Omega}_c^T \times (\vec{\Omega}_c^T \times \vec{R}_h) \quad (2.50)$$

Onde $\vec{\Omega}_c^T$ representa a componente vetorial da velocidade angular do foguete relativa ao referencial de lançamento e \vec{R}_h representa o vetor posição do foguete.

A Equação (2.48) trata-se de um diferencial vetorial relativo a um sistema inercial e a um sistema em movimento. Como o foguete é um corpo acelerado, girante e que movimenta-se relativamente a um referencial inercial, quando se aplica a Segunda Lei de Newton observa-se o surgimento de algumas forças fictícias que aparecem devido a estas condições (JÚNIOR, 2009). Isso explica o surgimento da componente da força de Einstein $\left(M \frac{\delta}{\delta t}(\vec{v}_c^T)\right)$, da força Coriolis $\left(2M(\vec{\Omega}_c^T \times \vec{v}_c^T)\right)$, da força de Euler $\left(M \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_c^T) \times \vec{h}\right)$ e da força centrífuga $\left(M \vec{\Omega}_c^T \times (\vec{\Omega}_c^T \times \vec{h})\right)$.

Reescrevendo a Equação (2.5) aplicando a ela todas as componentes de forças atuantes no corpo, obtém-se a Equação (2.51).

$$\sum \vec{F}_c = \vec{F}_E + \vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_{EINS} + \vec{F}_{COR} + \vec{F}_{EUL} + \vec{F}_{CENTR} \quad (2.51)$$

em que \vec{F}_{EINS} representa o vetor da força de Einstein; \vec{F}_{COR} representa a componente vetorial da força de Coriolis; \vec{F}_{EUL} a componente vetorial da força de Euler e \vec{F}_{CENTR} a componente da vetorial da força centrífuga.

O vetor \vec{v}_c^T pode ser escrito de acordo com as respectivas velocidades do veículo referentes aos eixos (x_c, y_c, z_c) do foguete, como é mostrado na Figura 2.26.

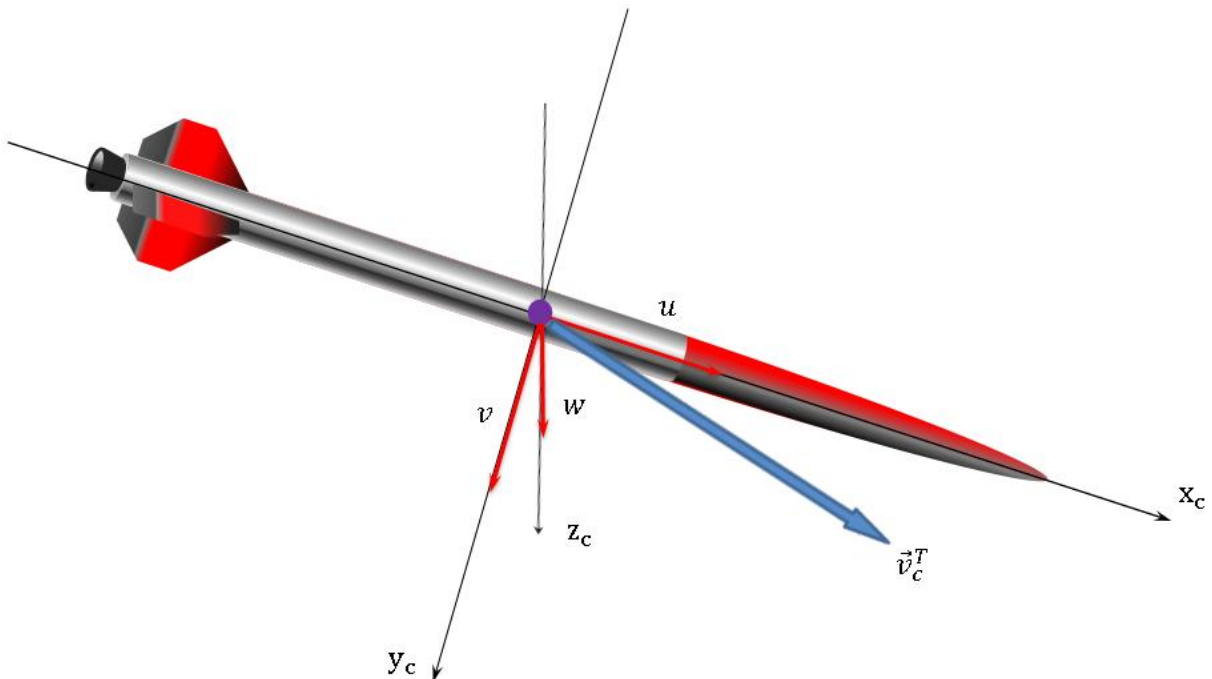


Figura 2.26 – Representação das velocidades inerentes aos eixos (x_c, y_c, z_c) do foguete.

$$\vec{v}_c^T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

em que u representa a componente da velocidade sobre x_c ; v representa a componente da velocidade sobre y_c e w representa a componente da velocidade sobre o eixo z_c .

O vetor $\vec{\Omega}_c^T$ pode ser escrito de acordo as respectivas velocidades angulares do veículo referentes aos eixos (x_c, y_c, z_c) do foguete, como é mostrado na Figura 2.27.

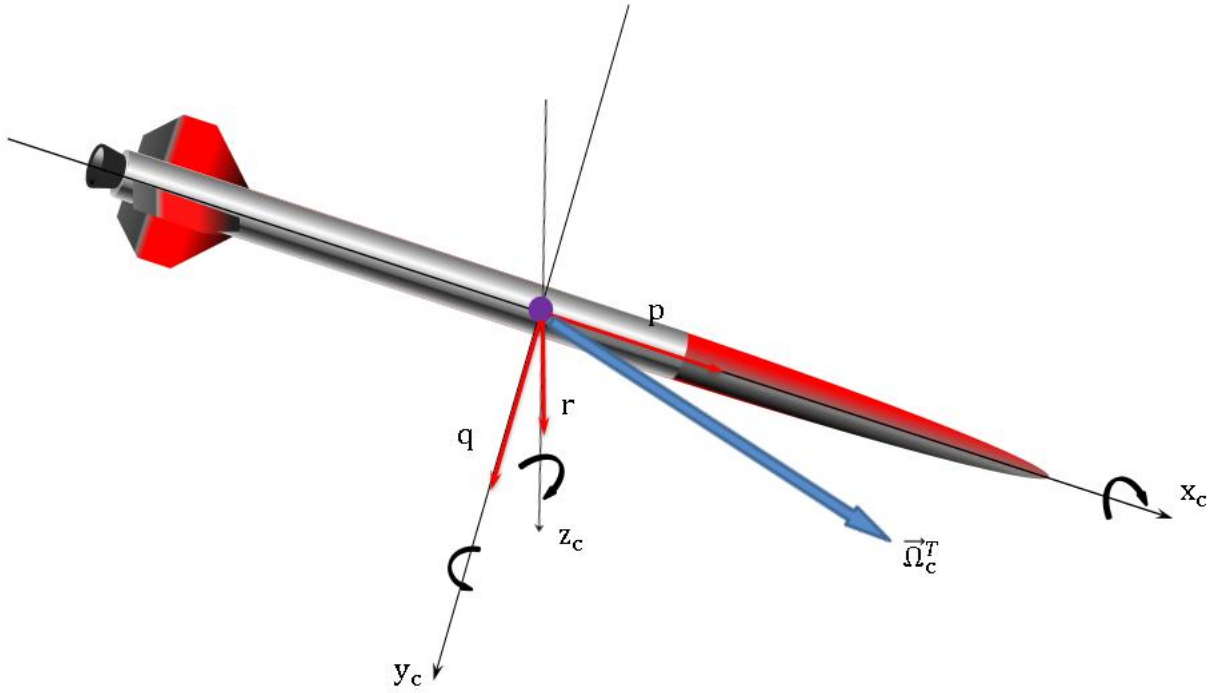


Figura 2.27 – Representação das velocidades angulares inerentes aos eixos do foguete (x_c, y_c, z_c) .

$$\vec{\Omega}_c^T = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

em que p representa a componente da velocidade angular sobre x_c ; q representa a componente da velocidade angular sobre y_c e r representa a componente da velocidade angular sobre o eixo z_c .

A Equação (2.54) pode agora ser escrita conforme mostra a Equação (2.50).

$$\sum \vec{F}_c = M \begin{bmatrix} 2(qw - vr) + (R_{h_{z_c}} \dot{q} - y_c \dot{r}) + (R_{h_{y_c}} p - x_c q)q - (R_{h_{x_c}} r - z_c p)r \\ 2(ur - pw) + (R_{h_{x_c}} \dot{r} - z_c \dot{p}) + (R_{h_{z_c}} q - y_c r)r - (R_{h_{y_c}} p - x_c q)p \\ 2(pu - uq) + (R_{h_{y_c}} \dot{p} - x_c \dot{q}) + (R_{h_{x_c}} r - z_c p)r - (R_{h_{z_c}} q - y_c r)q \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

A Equação (2.55) representa a dinâmica do momento linear do foguete.

$$\begin{bmatrix} F_E \\ F_E \beta_y \\ F_E \beta_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \\ mg\psi \\ -mg\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_D P_{din} A_1 \\ \left\{ P_{din} A_5 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta} [C_{L\beta}(l)] dl \right\} \beta \\ - \left\{ P_{din} A_5 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \alpha} [C_{L\alpha}(l)] dl \right\} \alpha \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 2(qw - vr) + (R_{h_{xc}} \dot{q} - y_c \dot{r}) + (R_{h_{xc}} p - x_c q)q - (R_{h_{xc}} r - z_c p)r \\ 2(ur - pw) + (R_{h_{xc}} \dot{r} - z_c \dot{p}) + (R_{h_{xc}} q - y_c r)r - (R_{h_{xc}} p - x_c q)p \\ 2(pu - uq) + (R_{h_{xc}} \dot{p} - x_c \dot{q}) + (R_{h_{xc}} r - z_c p)r - (R_{h_{xc}} q - y_c r)q \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

2.5.7.2 DINÂMICA ROTACIONAL

De acordo com a variação do momento angular, pode-se escrever a representação matemática da dinâmica rotacional do CM do corpo relativa à plataforma de lançamento por meio da Equação (2.56).

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}_c^T) = \frac{\delta}{\delta t} \vec{I} \cdot \vec{\Omega}_c^T + \vec{I} \frac{\delta}{\delta t} \vec{\Omega}_c^T + \vec{\Omega}_c^T \times (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}_c^T) \quad (2.56)$$

em que $\vec{\tau}_c$ é o vetor dos torques externos do foguete e \vec{I} representa o tensor de inércia.

O tensor de inércia \vec{I} é representado por uma matriz, cujos elementos representam os momentos e produtos de inércia do foguete. A Equação (2.57) apresenta o tensor de inércia

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{YY} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

em que os elementos da diagonal principal (I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ}) são os momentos de inércia principais do corpo e os demais elementos são os produtos de inércia ($-I_{xy}, -I_{xz}, -I_{yx}, -I_{yz}, -I_{zx}, -I_{zy}$). Estes elementos são calculados conforme as dimensões do corpo e seus eixos de simetria, caso haja. A Equação (2.58), Equação (2.59) e Equação (2.60) apresentam o cálculo dos momentos principais de inércia.

$$I_{XX} = \int_{CF} (y^2 + z^2) dm \quad (2.58)$$

$$I_{YY} = \int_{CF} (x^2 + z^2) dm \quad (2.59)$$

$$I_{ZZ} = \int_{CF} (y^2 + x^2) dm \quad (2.60)$$

Os produtos de inércia dependerão das configurações de simetria do corpo. Quando as coordenadas do foguete coincidem com os eixos principais de inércia, os

produtos de inércia são nulos ou muito pequenos. Eles são calculados conforme as Equações (2.61), (2.62) e (2.63).

$$I_{xy} = \int_{CF} (xy)dm \quad (2.61)$$

$$I_{xz} = \int_{CF} (xz)dm \quad (2.62)$$

$$I_{yz} = \int_{CF} (yz)dm \quad (2.63)$$

Considerando o foguete simétrico, o tensor de inércia pode ser escrito pela Equação (2.64).

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Tomando termo a termo a Equação (2.56).

$$\frac{\delta}{\delta t} \vec{I} \cdot \vec{\Omega}_c^T = \begin{bmatrix} \dot{I}_{XX} \\ \dot{I}_{YY} \\ \dot{I}_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{XX} p \\ \dot{I}_{YY} q \\ \dot{I}_{ZZ} r \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\vec{I} \frac{\delta}{\delta t} \vec{\Omega}_c^T = \begin{bmatrix} I_{XX} \\ I_{YY} \\ I_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX} \dot{p} \\ I_{YY} \dot{q} \\ I_{ZZ} \dot{r} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\vec{\Omega}_c^T \times (\vec{I} \cdot \vec{\Omega}_c^T) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{XX} p \\ I_{YY} q \\ I_{ZZ} r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{ZZ} - I_{YY}) r q \\ (I_{XX} - I_{ZZ}) r p \\ (I_{YY} - I_{XX}) p q \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

O somatório dos torques relativos ao CM é dado pela Equação (2.68).

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_A + \vec{\tau}_{AA} + \vec{\tau}_{AJ} + \vec{\tau}_C \quad (2.68)$$

em que $\vec{\tau}_A$ é a componente vetorial do torque aerodinâmico; $\vec{\tau}_{AA}$ é a componente vetorial do torque de amortecimento aerodinâmico; $\vec{\tau}_{AJ}$ é a componente vetorial do torque de amortecimento de jato e $\vec{\tau}_C$ é o torque de controle.

As ditas forças inerciais, (força de Coriolis, Einstein e etc.), por se tratarem de forças internas ao foguete não geram torques.

A Equação (2.68) pode agora ser escrita conforme mostra a Equação (2.69).

$$\sum \vec{\tau} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{XX} p + I_{XX} \dot{p} + (I_{ZZ} - I_{YY}) r q \\ \dot{I}_{YY} q + I_{YY} \dot{q} + (I_{XX} - I_{ZZ}) r p \\ \dot{I}_{ZZ} r + I_{ZZ} \dot{r} + (I_{YY} - I_{XX}) p q \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

A Equação (2.70) representa a dinâmica do momento angular do foguete.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \left\{ P_{din} A_5 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \alpha} [C_{L\alpha}(l)] dl \right\} l_\alpha \alpha \\ - \left\{ P_{din} A_6 \int_0^L \frac{\partial}{\partial \beta} [C_{L\beta}(l)] dl \right\} l_\beta \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-C_{Rp} P_{din} A_r l_r^2}{2 |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|} p \\ \frac{-C_{Yq} P_{din} A_r l_r^2}{2 |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|} q \\ \frac{-C_{Pr} P_{din} A_r l_r^2}{2 |\vec{v}_c^T - \vec{v}_v^T|} r \end{bmatrix} + \dot{m} \begin{bmatrix} 0 \\ ql_e^2 \\ rl_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{XX} p + I_{XX} \dot{p} + (I_{ZZ} - I_{YY}) r q \\ \dot{I}_{YY} q + I_{YY} \dot{q} + (I_{XX} - I_{ZZ}) r p \\ \dot{I}_{ZZ} r + I_{ZZ} \dot{r} + (I_{YY} - I_{XX}) p q \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

2.6 PROPELENTES SÓLIDOS

Propelentes sólidos podem ser "compósitos" de base simples, dupla ou tripla (SUTTON e BIBLARZ, 2001). Compósitos, consistem tipicamente de uma mistura de oxidantes granulados, como por exemplo NH_4NO_3 , NH_4ClO_4 e KNO_3 , com compostos capazes de liberar energia rapidamente. Estes compostos energéticos podem ser ligantes poliméricos (óleo de mamona), flocos (HMX) ou em pó (açúcar). Como agentes catalizadores costuma-se utilizar óxidos de alumínio ou de ferro (BLACK, 2012). Para aumentar a velocidade da reação de queima, costuma-se adicionar aditivos metálicos como óxido de alumínio ou ferro. Propelentes sólidos costumam ser quebradiços e, portanto adiciona-se plastificantes para que fiquem mais maleáveis. Compósitos de base simples, dupla ou tripla são misturas compostas por combustível, oxidante, pastas e plastificantes macroscopicamente indistinguíveis (BLACK, 2012).

As vantagens de se utilizar propelente sólidos são:

- Facilidade de armazenagem;
- Fáceis de fabricar;
- Custo reduzido de materiais e fabricação.

Sendo as desvantagens:

- O impulso específico, se comparado a propelentes líquidos, é menor;
- Aumento significativo da massa do foguete;
- Combustões não controladas.

No foguete modelismo são usados propelentes sólidos a base de açúcar e KNO_3 . Essa mistura é conhecida por $KNSU$ e é de fácil fabricação e maneabilidade. São propelentes que precisam ser consumidos rapidamente por serem higroscópicos e quando enrijecidos quebram facilmente (NAKKA, 2013). Durante a mistura entre o oxidante e o combustível, precisa-se mexer bastante até que a mistura fique homogênea. Quanto mais homogênea melhor será a eficiência da queima (NAKKA, 2013).

Propelentes de $KNSU$ não geram impulsos específicos elevados, mas se preparados corretamente podem gerar impulsos específicos satisfatórios na ordem de 100 s. Impulso específico são características específicas de cada tipo de propelente (densidade da mistura, peso molecular e etc.) e medem a eficiência do jato em unidade de tempo (segundos). São calculados como mostra a Equação (2.71).

$$I_{sp} = \frac{u_e}{g_0} \quad (2.71)$$

em que I_{sp} é o impulso específico; u_e é a velocidade de escape dos gases e g_0 é a gravidade local na superfície da Terra.

De acordo com alguns estudos (NAKKA, 2012) define-se uma porcentagem de 65% de KNO_3 e 35% de açúcar para preparar a mistura que compõe o propelente.

Outro fator de grande importância para propelentes sólidos é a geometria de seu grão (SUTTON e BIBLARZ, 2001). A geometria do grão define se a curva de empuxo será basicamente progressiva, neutra ou regressiva, como mostra a Figura 2.28. Para este projeto foi considerado a geometria estrela por possuir o melhor custo benefício em massa e eficiência de empuxo relativo ao grão Battes (*rod and tube*).

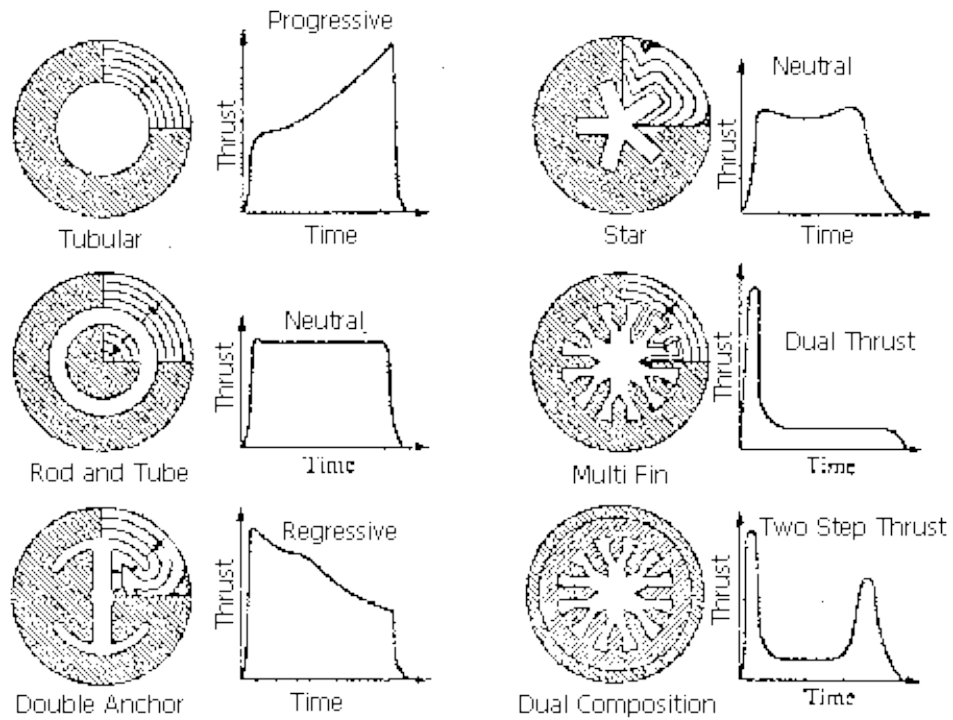


Figura 2.28 – Geometria dos grãos.

Fonte: (NAKKA, 2012).

A massa de propelente é calculada pela equação de Tsiolkovsky, como mostra a Equação (2.72).

$$m_p = m_T e^{-\frac{\Delta v}{u_e}} \quad (2.72)$$

em que m_p é a massa de propelente; m_T é a massa total do foguete; Δv é o incremento de velocidade e u_e é a velocidade de escape dos gases.

Na equação de Tsiolkovsky não são consideradas as perdas geradas pela força de arrasto e gravitacional (CORNELISSE, SCHÖYER e WAKKER, 1979).

3 METODOLOGIA

Este trabalho consiste em simular o comportamento aerodinâmico e a atitude de um foguete por meio de três *softwares*: AeroLAB³, MATLAB® e OpenRocket⁴.

No AeroLAB foram executadas as simulações responsáveis em gerar arquivos em formato “.DAT” como dados de saída, com as curvas de desempenho aerodinâmico durante o voo, em função das condições de entrada. O MATLAB® será responsável em compilar esses dados e plotar os gráficos. As informações processadas no AeroLAB serão integradas no OpenRocket e este será responsável por gerar as curvas de altitude, velocidade, aceleração e empuxo durante todo o voo. As demais variáveis de entrada consistem em tempo de queima do propelente e tempo de voo, a massa inicial e final, condições de vento e sistema de posicionamento inercial.

3.1 DADOS DE PROJETO

Os componentes apresentados a seguir servirão de base para todas as simulações realizadas relativas a trajetória de voo e comportamento aerodinâmico, portanto não houve uma preocupação quanto à capacidade de resistência dos componentes relativo aos esforços envolvidos, tão pouco os caracteres de otimização do formato estrutural e aerodinâmico.

3.2 COIFA

Foi definido que a composição da coifa seria de fibra de vidro devido as seguintes propriedades:

- Leveza;
- Reciclagem;

³ *Link para download:* <http://www.rocketry.org/software/softwareDetails.php?mainID=344>

⁴ *Link para download:* <http://openrocket.sourceforge.net/download.html>

- Não apodrecimento;
- Baixa condutividade térmica;
- Baixa porosidade;
- Baixo custo de acabamento;
- Baixo custo de manutenção;
- Alta resistência a agentes químicos;
- Resistência mecânica elevada;
- Características elétricas;
- Incombustibilidade;
- Estabilidade dimensional;
- Compatibilidade com matrizes orgânicas;
- Permeabilidade de Dielétricos;
- Integração de funções.

O perfil da coifa será obtido por meio da equação de série de potência com o fator de

$n = 0,5$. Esta equação gera a função da curva que descreverá a forma geométrica da coifa do foguete. Sendo assim, a Equação (3.1) representa esta função.

$$f(x) = R \left(\frac{x}{L} \right)^n \quad (3.1)$$

Onde R é o raio da coifa, L é o comprimento total e n é um fator que varia no intervalo $0 \leq n \leq 1$.

O sólido de revolução pode ser gerado por meio da Equação (3.2).

$$V = \pi \int_0^{L_2} [f(x)]^2 dx \quad (3.2)$$

Entretanto, não se trata de um objeto maciço e uniforme e sim uma casca, referente ao objeto desejado, com um rebaixo na extremidade inferior. Para gerar o sólido de revolução foram realizadas manipulações matemáticas de forma que a Equação (3.2) se transformasse na Equação (3.3).

$$V_{coifa} = \pi \int_0^{L_2} \left[\left(r_3 \right) \left(\frac{x}{L_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx - \pi \int_{L_1}^{L_2} \left[\left(r_1 \right) \left(\frac{x-L_1}{L_2-L_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx + \pi \int_{L_2}^{L_3} (r_2)^2 dx - \pi \int_{L_2}^{L_3} (r_1)^2 dx \quad (3.3)$$

Os dados de entrada para a integração da Equação 3.3 e a formação do sólido de revolução são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Dados dimensionais de projeto e propriedades físicas do material.

Dados dimensionais de projeto e propriedades físicas do material			
Dimensões (cm)		Propriedades da fibra de vidro	
L_1	0,8	Peso Específico (N/m^3)	1,4
L_2	60	Coefficiente de Dilatação Linear ($^{\circ}C^{-1}$)	$17 \cdot 10^{-6}$
L_3	65	Resistência à Flexão (kg/cm^2)	2000
r_1	4,2	Resistência à Compressão (kg/cm^2)	1800
r_2	4,6	Condutibilidade Técnica ($kcal/mh^{\circ}C$)	0,2
r_3	5,0	Alongamento (%)	1
Temperatura: perfeitamente estável entre $-40^{\circ}C$ e $104^{\circ}C$			

A representação gráfica das funções que são integradas encontram-se na Figura 3.1.

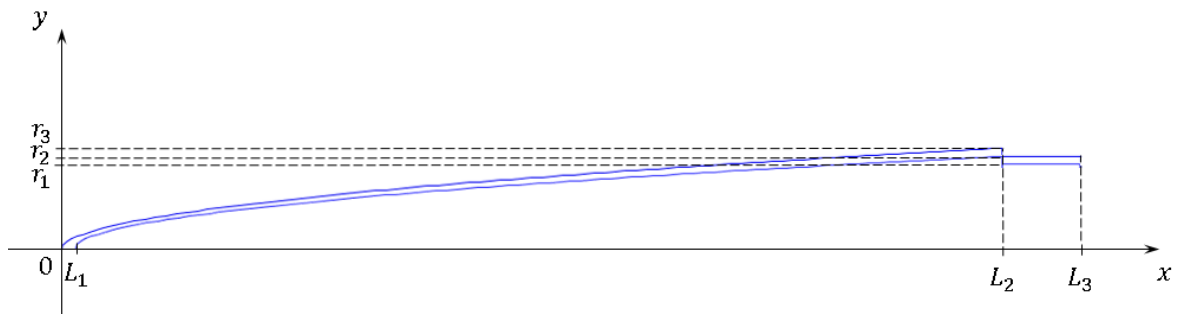


Figura 3.1 – Apresentação das funções que geratrizes do invólucro cilíndrico.

A integração da Equação (3.3) gera a Equação (3.4).

$$V_{coifa} = \pi \int_0^{60} \left[(5) \left(\frac{x}{60} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx - \pi \int_{0,8}^{60} \left[(4,2) \left(\frac{x-0,8}{60-0,8} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx + \pi \int_{60}^{65} (4,6)^2 dx - \pi \int_{60}^{65} (4,2)^2 dx = 771,1228 cm^3 \quad (3.4)$$

A casca de revolução gerada pode ser vista na Figura 3.2.

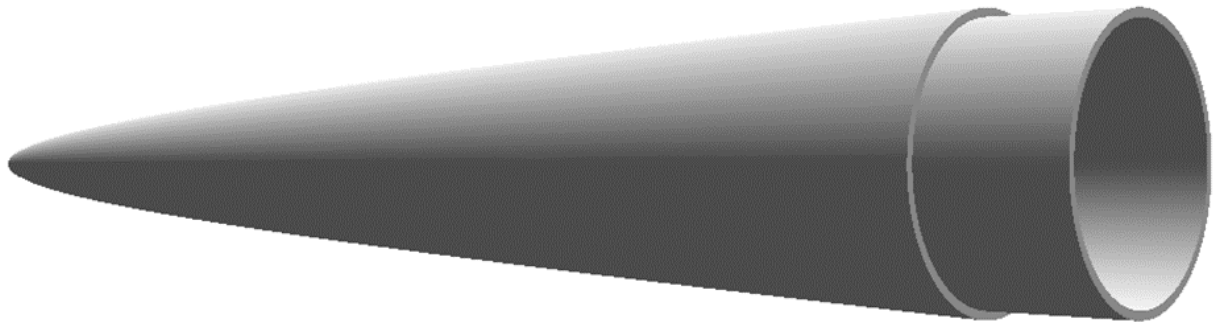


Figura 3.2 – Coifa do foguete.

Os dados da posição do CG e CP, tal como a massa total da coifa, são apresentadas na Figura 3.3.

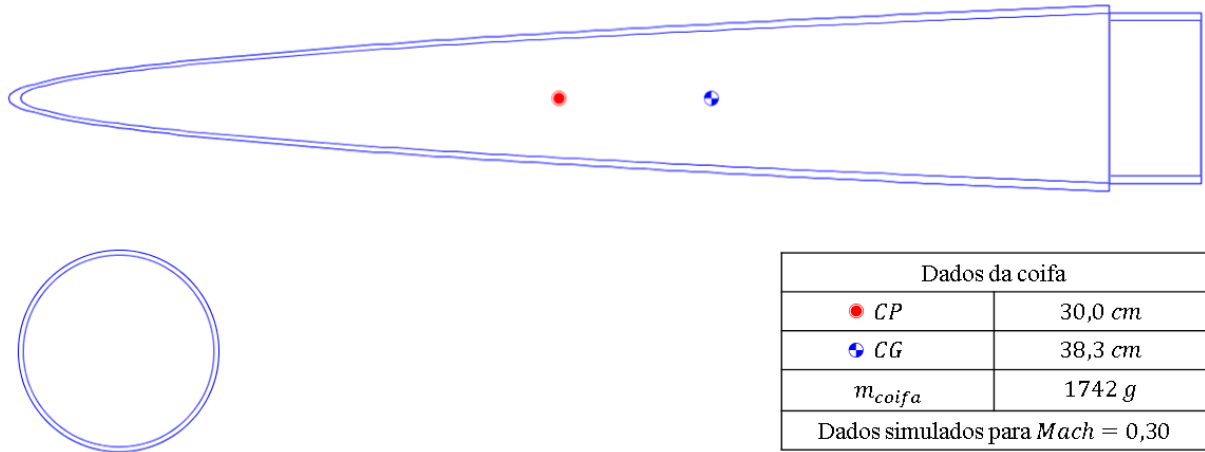


Figura 3.3 – Dados da coifa.

3.3 FUSELAGEM LONGITUDINAL (CORPO)

O corpo é um componente estrutural longitudinal do foguete, de formato cilíndrico, procurando reduzir ao máximo a força de arrasto gerada durante o voo. Foi definido que o material de construção seria o mesmo adotado para a coifa, ou seja, a fibra de vidro. Os dados dimensionais da estrutura do corpo são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Dados dimensionais da estrutura longitudinal.

Dados dimensionais de projeto	
Dimensões (cm)	
L_4	140
r_3	5,0
r_2	4,6

A Figura 3.4 apresenta as funções que são integradas para gerar o sólido de revolução cilíndrico.

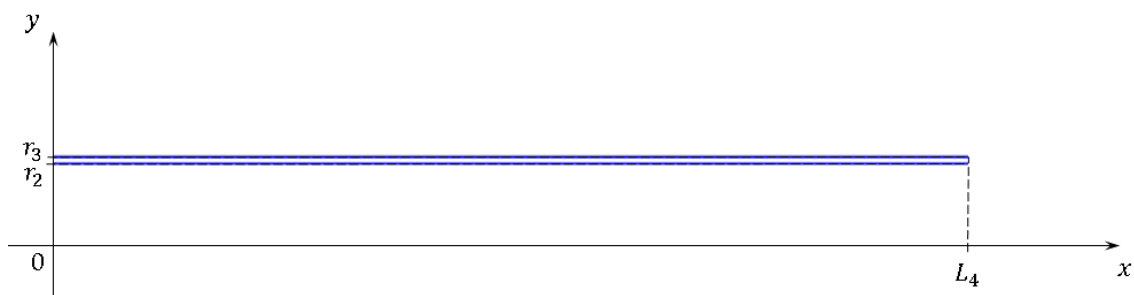


Figura 3.4 – Sólido de revolução cilíndrico.

Para gerar o formato cilíndrico do corpo, integrou-se a Equação (3.5).

$$V_{fus} = \pi \int_0^{L_4} (r_3)^2 dx - \pi \int_0^{L_4} (r_2)^2 dx \quad (3.5)$$

Substituindo os dados da Tabela 3.2 na Equação (3.6).

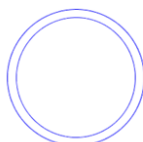
$$V_{fus} = \pi \int_0^{140} (5,0)^2 dx - \pi \int_0^{140} (4,6)^2 dx = 1688,9202 \text{cm}^3 \quad (3.6)$$

O sólido gerado é apresentado na Figura 3.5.



Figura 3.5 – Estrutura longitudinal do foguete.

Os dados da posição do CG e a massa total da estrutura longitudinal são apresentadas na Figura 3.6.



Dados da estrutura longitudinal	
• CG	70,0 cm
m_{fus}	1148 g
Dados simulados para $Mach = 0,30$	

Figura 3.6 – Dados da estrutura longitudinal.

3.4 ALETAS

Para a construção das aletas foi determinado que elas seriam compostas de fibra de vidro de formato trapezoidal com cantos arredondados. As dimensões são apresentadas pela Tabela 3.3 e o desenho será apresentada na Figura 3.7.

Tabela 3.3 – Dados dimensionais da aleta.

Dados dimensionais da aleta (cm)	
l_1	1,0
l_2	10,0
L_5	6,0
L_6	17,0
L_7	23,0
ε	0,3

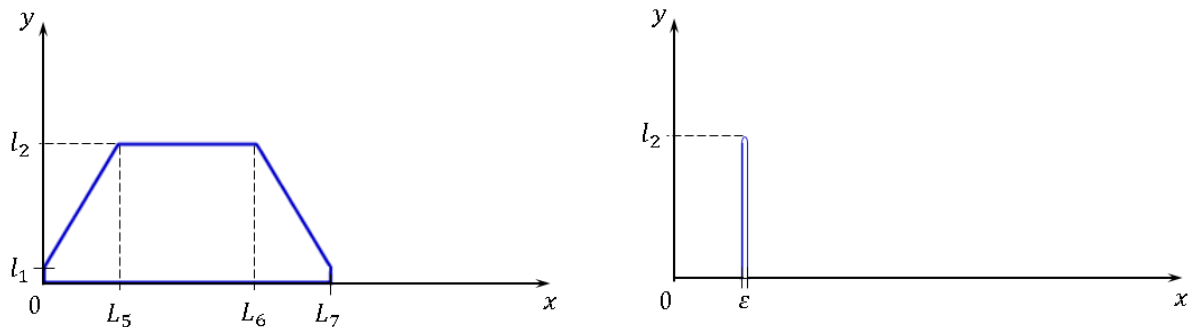


Figura 3.7 – Formato geométrico da aleta e espessura da mesma.

Três aletas estão dispostas na região inferior da estrutura longitudinal do foguete. Esta configuração tem por objetivo trazer o CP para uma região localizada abaixo do CG, causando uma condição de estabilidade aerodinâmica de voo. O formato do foguete pode ser visto na Figura 3.8.



Figura 3.8 – Quantidade e disposição das aletas no corpo do foguete.

A Figura 3.9 apresenta os dados gerais do foguete *Rocket Raccoon 109* como a posição do CG e CP, a massa total, o comprimento dos componentes e total, diâmetro da estrutura e câmara de combustão.

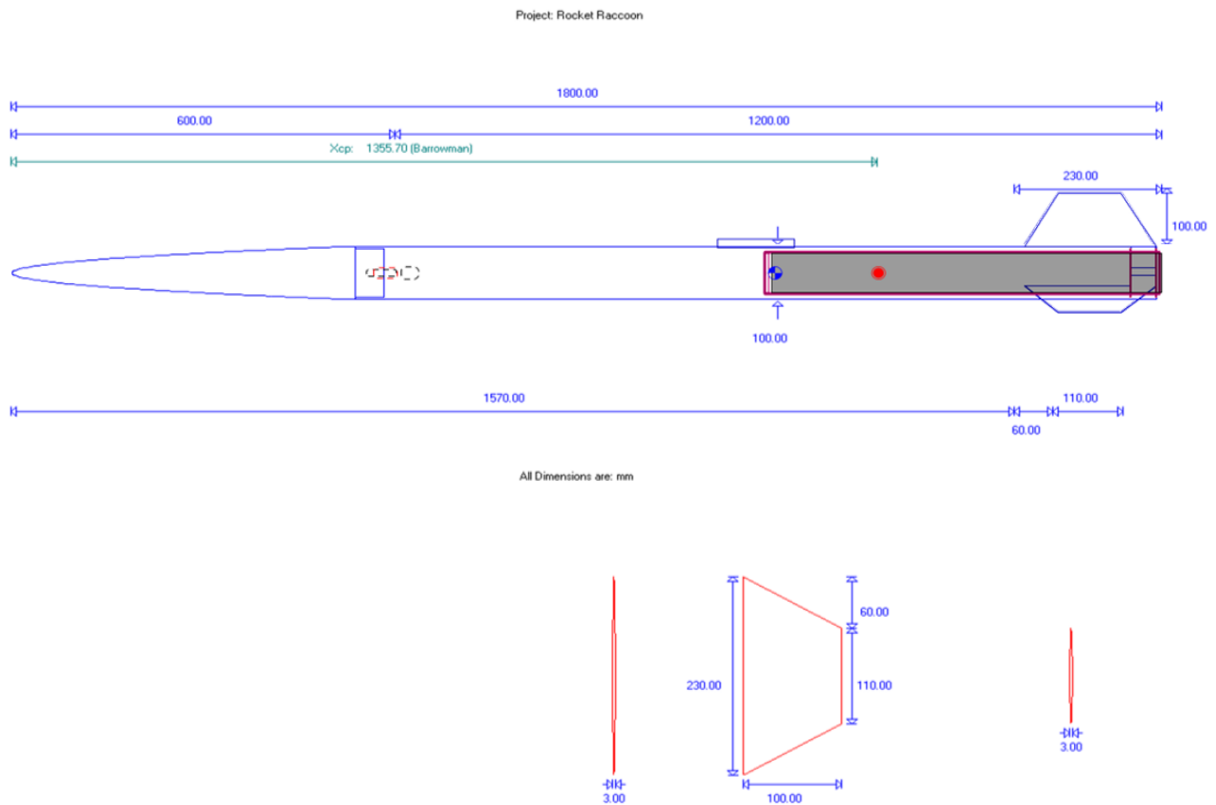


Figura 3.9 – Planta do dimensionamento dos componentes externos do foguete gerado pelo software AeroLab.

3.5 SIMULAÇÃO

Para a simulação foram considerados os seguintes parâmetros, como mostra a Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Dados para a simulação de lançamento do foguete.

Dados de propulsão		Dados de lançamento	
Impulso total	$I = 3872 \text{ Ns}$	Ângulo de ataque	$\alpha = 0^\circ$
Empuxo médio	$F_{E_{\text{médio}}} = 1006 \text{ N}$	Latitude	$\Gamma_2 = -2^\circ 24' 32''$
Empuxo máximo	$F_{E_{\text{máx}}} = 1268 \text{ N}$	Longitude	$\Gamma_1 = -44^\circ 24' 53''$
Tempo de queima	$t = 3,5 \text{ s}$	Altitude	$h = 32 \text{ m}$
Massa inicial	$m_0 = 5993 \text{ g}$	Temperatura	$T = 28,5^\circ\text{C}$
Massa final	$m_f = 2473 \text{ g}$	Pressão	$P = 1008 \text{ hPa}$
Geometria do grão	Estrela	Velocidade do vento	$v = 8,61 \text{ m/s}$

4 RESULTADOS

Para a geração de resultados as simulações foram realizadas no AeroLab, os dados obtidos foram salvos em um arquivo e processados no MATLAB®, que gerou os gráficos de cada análise.

4.1 COEFICIENTE DE ARRASTO

Para a simulação do desempenho aerodinâmico do foguete *Rocket Raccoon* 109 foi utilizado o *software* AeroLAB. Inicialmente foi realizado uma simulação que distinguisse cada tipo de coifa (cônica, parabólica, elíptica etc) e os dados foram comparados em um único gráfico.

A Figura 4.1 apresenta as curvas do comportamento do coeficiente de arrasto de diversos formatos de coifa em função do número de Mach. Para a análise, considerou-se ângulo de ataque igual a zero e não variou-se esse parâmetro para outros valores, pois este não se trata do escopo deste trabalho.

Cada curva apresenta um comportamento aerodinâmico à medida que a velocidade aumenta. Por exemplo, das seis coifas simuladas, será analisada a coifa que obteve o pior e o melhor desempenho aerodinâmico.

A coifa em formato de elipsoide apresenta o pior desempenho dentre as demais. O crescimento de sua curva dá-se bem antes de $M = 1$ e permanece até $M = 3$, apresentando, com isso, o maior coeficiente de arrasto durante o voo. Já a coifa escolhida para o projeto, o tipo $1/2$ de *power*, como é conhecida na literatura (WILEY e SARAFIN, 2007), apresenta o melhor desempenho dentre as demais e por se tratar do componente específico do projeto, sua curva será separada das demais para que seja analisada. Desta forma, a Figura 4.2 apresenta o coeficiente de arrasto da coifa definida para este projeto.

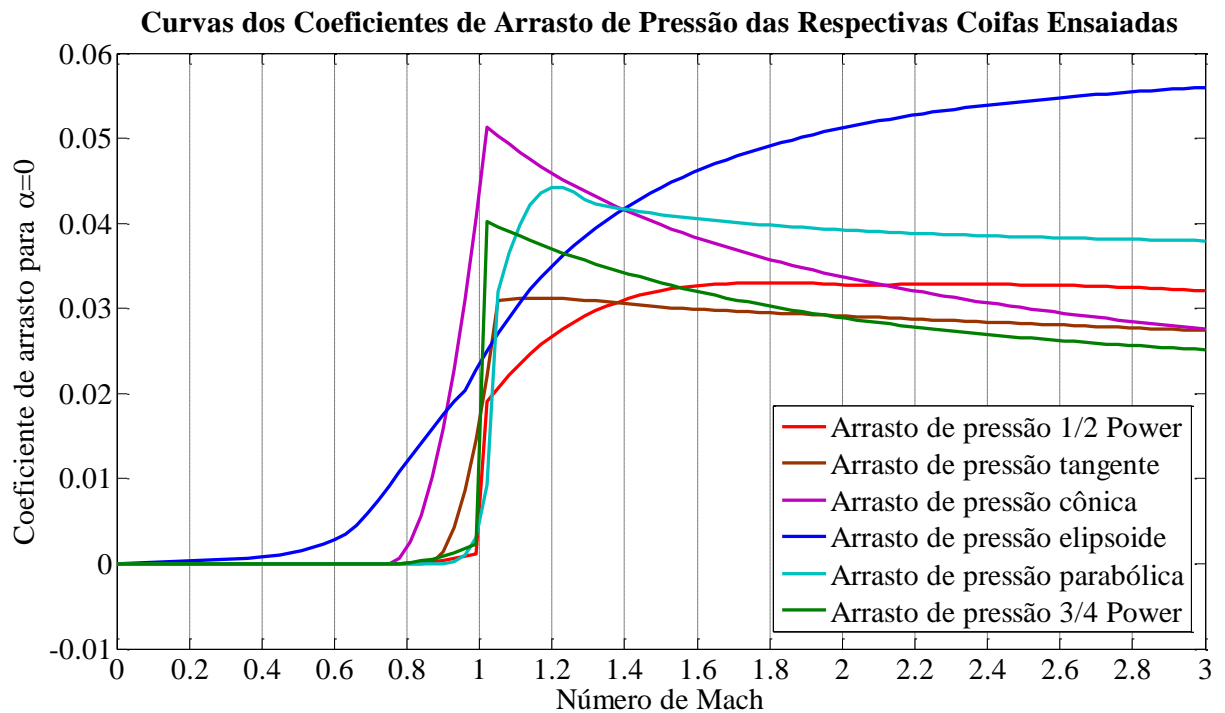


Figura 4.1 – Curvas dos coeficientes de arrasto de pressão das respectivas coifas.

A curva apresenta o comportamento do coeficiente de arrasto em função do número de Mach. Quando o foguete encontra-se em $M \leq 0,8$, o arrasto causado devido à pressão de nariz é essencialmente baixo relativo as demais coifas.

O foguete entra na região transônica, $M = [0,8; 1,02]$, quando algumas de suas partes começam a atingir velocidades de $M > 1$. Quando o foguete atinge $M = 1$, região sônica, a maior diferença de pressão passa para a frente do foguete, aumentando significativamente o coeficiente de arrasto de pressão devido a formação da onda de choque. Esta onda de choque estende-se da região traseira até a região dianteira do foguete e tem formato de cone (Cone de Mach) (THOMSON, 1962). A partir de $M = 1,02$ a derivada da curva atenua-se e no intervalo de $M = [2; 3]$ a função passa a variar muito pouco. Isso acontece devido ao posicionamento da coifa frente a onda de choque.

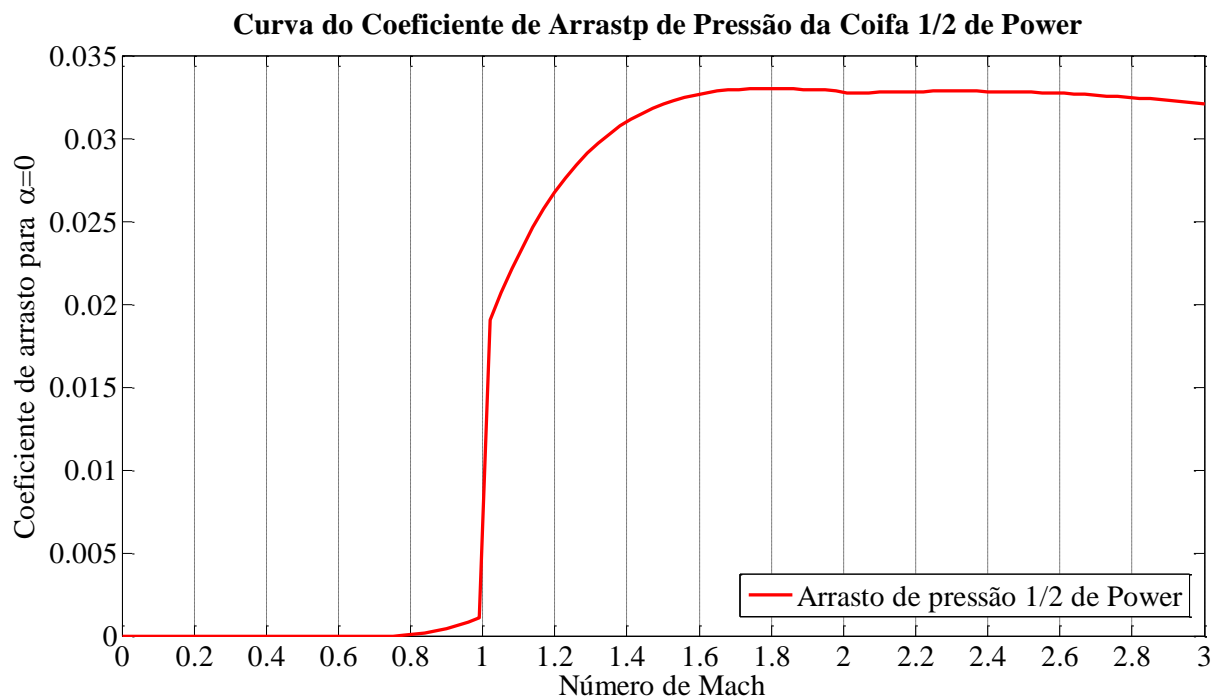


Figura 4.2 – Curva do coeficiente de arrasto de pressão da coifa de $1/2$ de *power*.

A diferença entre as curvas dos gráficos da Figura 4.3 deve-se a descontinuidade de forma da coifa em sua base. A coifa de $1/2$ de *power* sofre uma descontinuidade abrupta em sua base e isso faz com que o arrasto seja maior, já que o efeito de descolamento é facilitado.

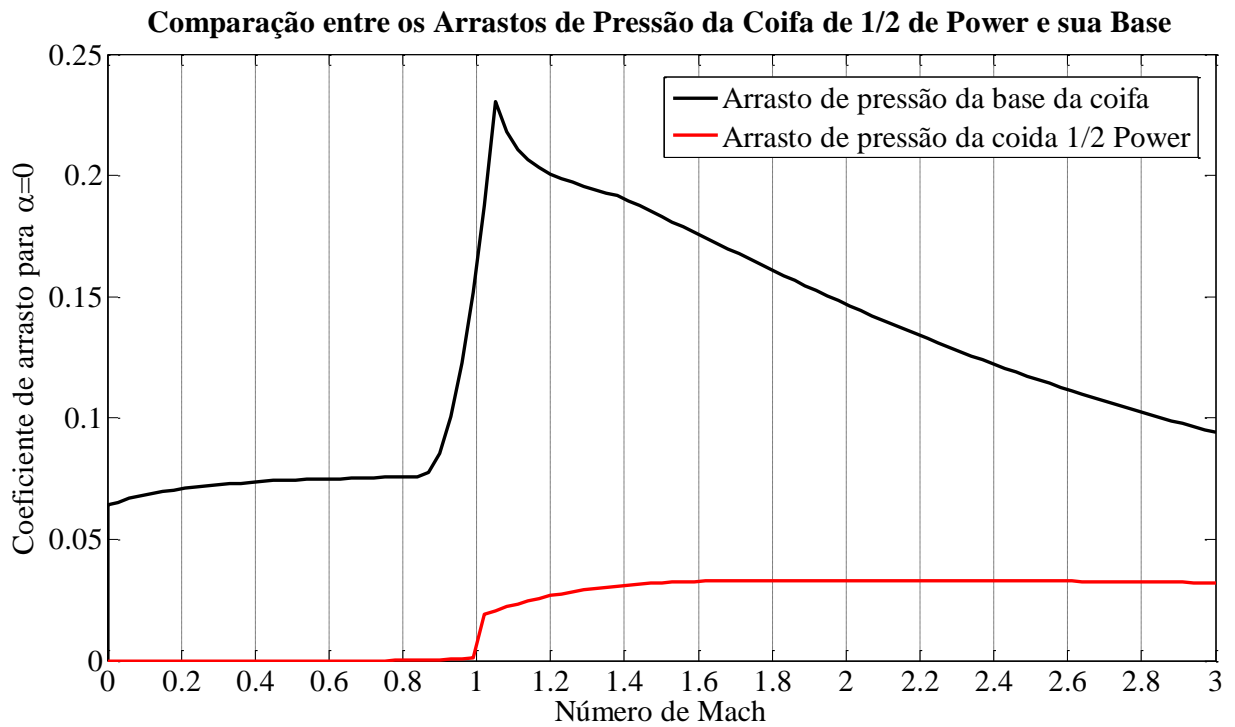


Figura 4.3 – Comparação entre os arrastos de pressão da coifa de $1/2$ de *power* e sua base.

A Figura 4.4 apresenta o resultado da relação entre o atrito da superfície da aleta em contato com o ar e a pressão de arrasto gerada.

O atrito é máximo na velocidade mínima, já que o ar estará em contato constante com o corpo. À medida que a velocidade aumenta, as ondas de choque aumentam, e o regime que era laminar passa a tornar-se turbulento devido a formação dos vórtices e as camadas de ar começam a descolar-se da superfície de contato. O ar deixa de envolver a aleta por completo, o que explica a redução do atrito com o aumento da velocidade. Enquanto o atrito é reduzido a pressão aumenta pelo mesmo motivo já comentado na Figura 4.2.

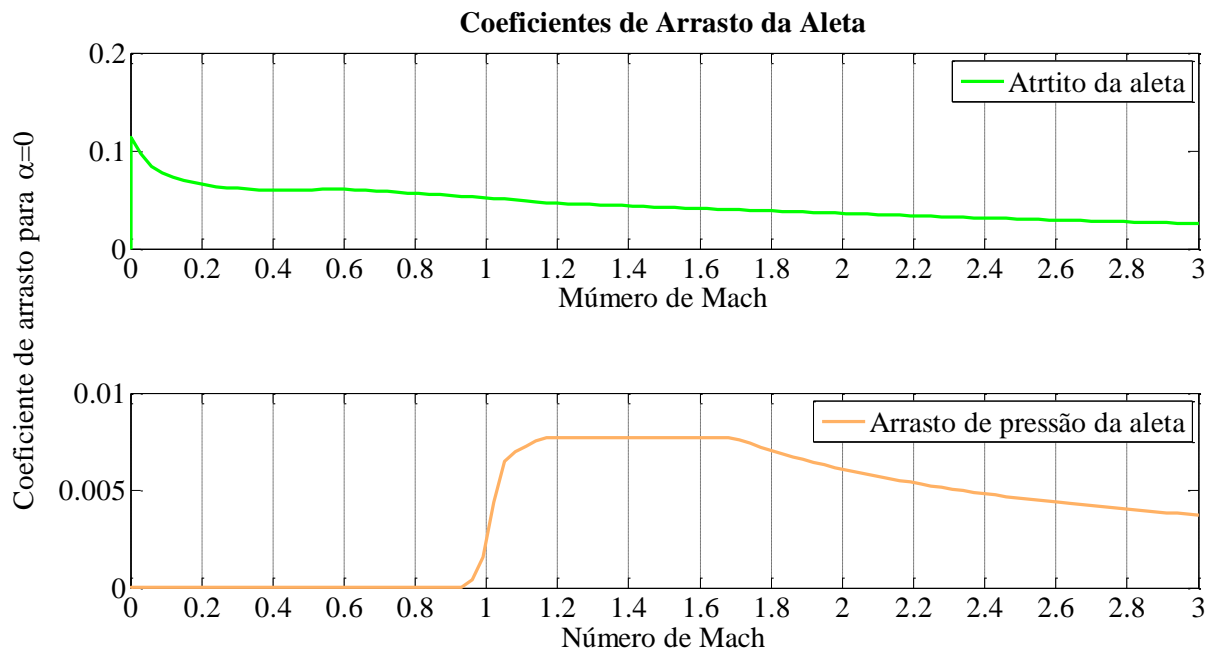


Figura 4.4 – Coeficientes de Arrasto da aleta.

A curva mostrada no gráfico da Figura 4.5 representa o coeficiente de arrasto gerado pelo foguete. No gráfico é possível observar que para uma região de $M < 0,85$ a curva tem derivada decrescente em consequência do aumento da velocidade e a capacidade do fluido escoar sobre a superfície num regime laminar. Quando $M = 1$ as ondas de choque aumentam o cone de Mach surge e com ele uma região de formação de vórtices devido aumento da entropia na região. À medida que o número de Mach aumenta a camada limite também aumenta. Isso é visto na Equação 4.1.

$$\delta \propto \frac{M_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (4.1)$$

Onde δ é a camada limite; M_{∞} é o número de Mach e Re_x é o número de Reynolds.

Como a camada limite aumenta, apesar de existir um regime de escoamento turbulento interno a esta camada, a superfície superior dela escoar em regime lamelar e os efeitos de contato são reduzidos o que faz com que haja a redução do coeficiente de arrasto. Em outras palavras, o ar escoar sobre uma superfície de ar e não sobre a estrutura física do foguete.

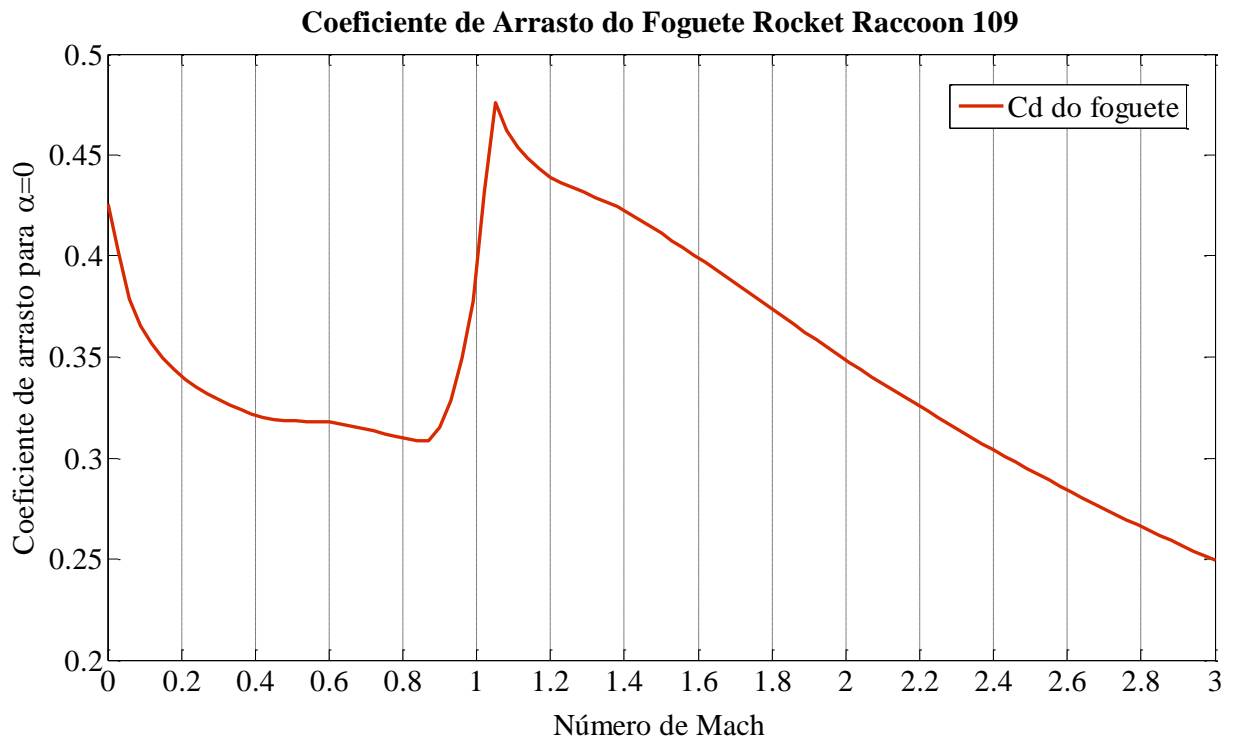


Figura 4.5 – Coeficiente de arrasto do foguete.

4.2 EMPUXO

O gráfico mostrado na Figura 4.6 apresenta o comportamento controlado da combustão onde a velocidade de exaustão dos gases é praticamente constante o que intervém diretamente no comportamento continuado da força de empuxo.

A ascensão inicial da curva da Figura 4.6 indica o momento em que inicia-se a queima, momento este o qual a área de queima do propelente e a pressão interna da câmara são máximas. Por depender da pressão interna, a taxa de combustão e exaustão encontram-se em desequilíbrio. A medida que é consumido, o propelente reduz sua área de queima e no momento em que a taxa de combustão e exaustão equiparam-se, a pressão interna entra em equilíbrio. Com a queima, a geometria estrelada do grão converge para uma geometria cilíndrica e a partir daí o empuxo começa a reduzir junto com a pressão interna.

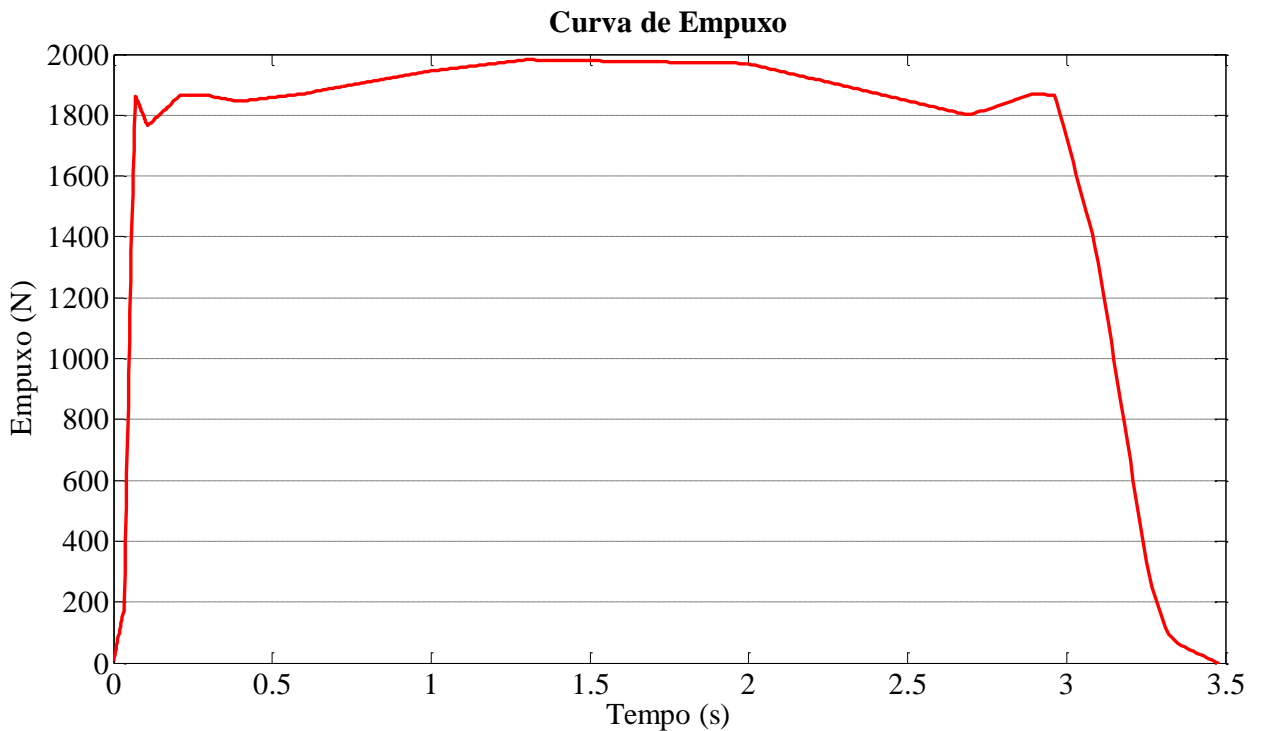


Figura 4.6 – Empuxo.

4.3 VELOCIDADE

A Figura 4.7 mostra a variação da velocidade do foguete durante todo o tempo de queima de seu propelente e isso ocorre até, aproximadamente, $t = 3,5 \text{ s}$ e $\vec{v}_{m\acute{a}x} = 341\hat{j} \text{ m/s}$ (tomando em vista apenas a componente vertical da velocidade). Neste momento o movimento do corpo dá-se conforme prescreve a Primeira Lei de Newton. Todavia, por esta velocidade de subida estar sob a interferência direta de uma desaceleração gravitacional, sistema não conservativo, a velocidade de subida reduz-se a zero. Neste momento o foguete atingiu o apogeu de voo e então um paraquedas é disparado fazendo com que ele seja trazido ao solo em segurança. A partir daí a força de arrasto induzida pelo paraquedas faz com que a velocidade vertical seja pequena e próxima de constante.

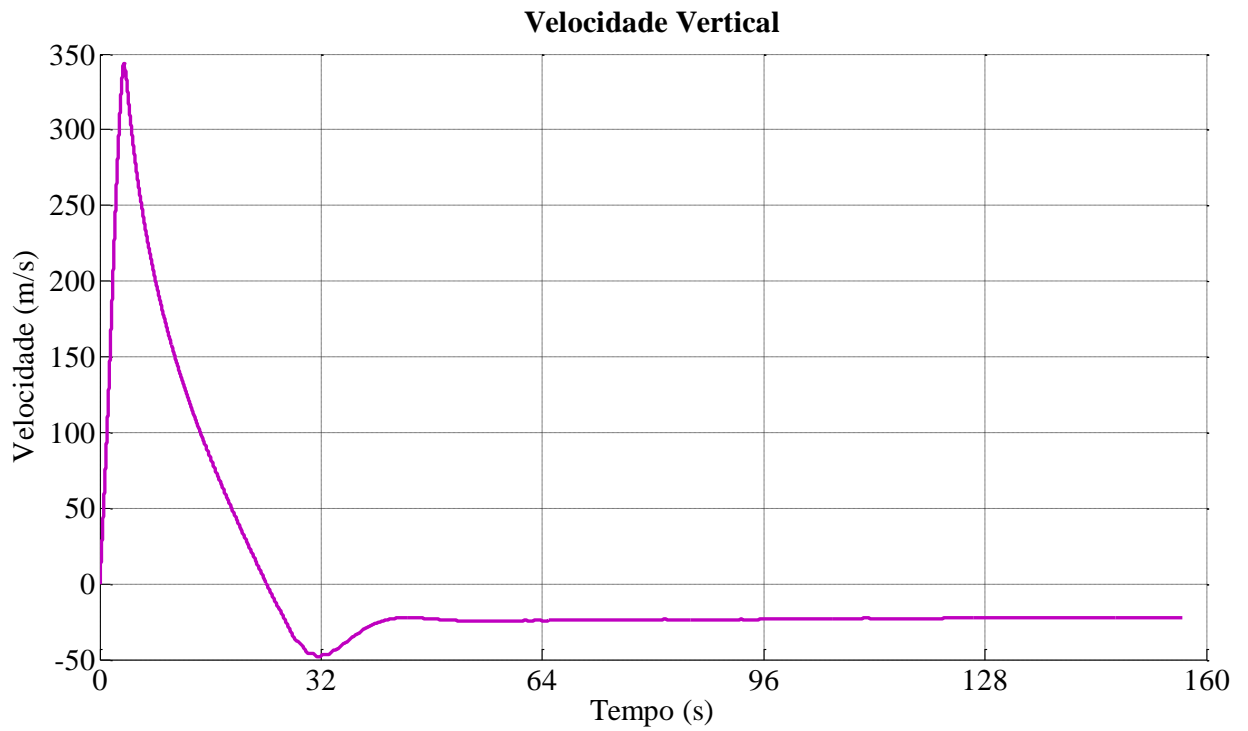


Figura 4.7 – Curva da velocidade vertical do foguete.

A curva mostrada na Figura 4.8 apresenta o momento em que o foguete atinge o apogeu, ou seja, quando $v = 0 \text{ m/s}$ e $t = 24 \text{ s}$, e o paraquedas passa a controlar a velocidade de descida, mantendo-a baixa e próxima de constante.

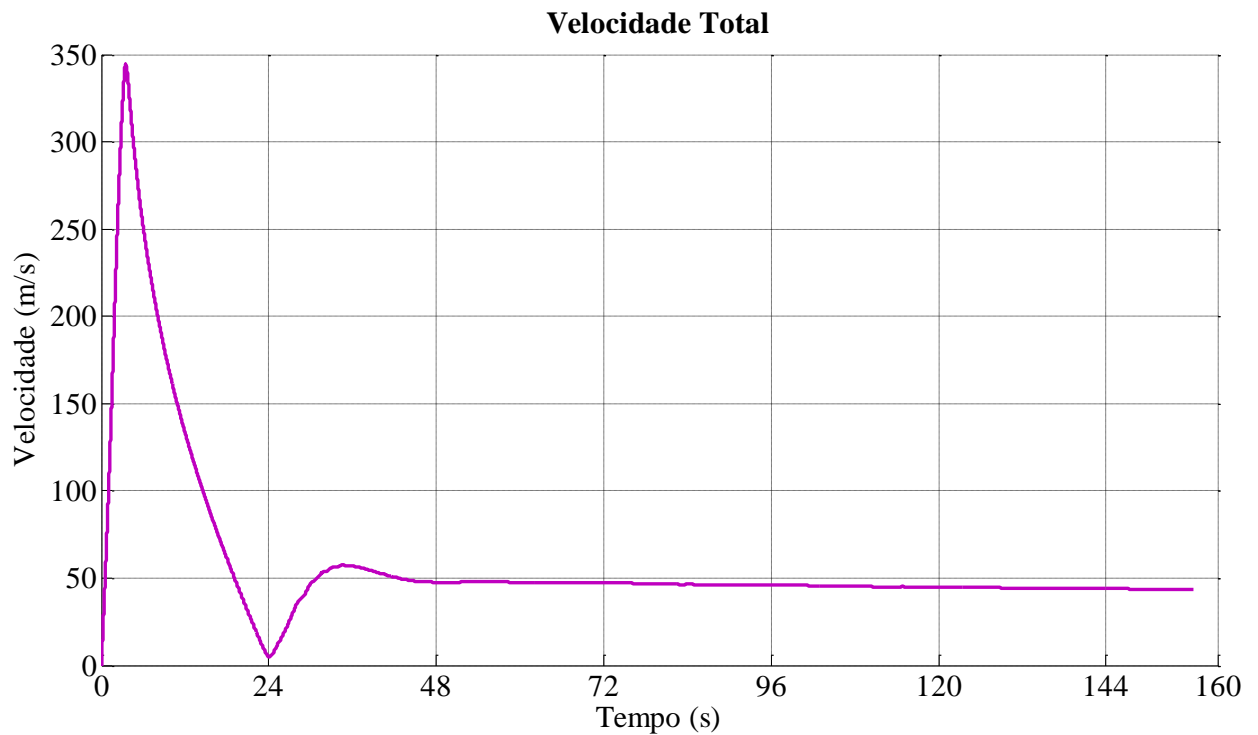


Figura 4.8 – Velocidade total do foguete.

4.4 APOGEU

O foguete tem uma ascensão rápida até próximo dos seiscentos metros de altitude, quando $t = 3,5 s$. Neste momento todo o propelente foi queimado e então o foguete permanece por inércia até atingir seu apogeu em três mil duzentos e cinquenta metros e $t = 24 s$. Então, o paraquedas é disparado e passa a desacelerar o foguete. Quando $t = 35 s$, a velocidade limite de queda é atingida explicando a trajetória linear e ascendente do foguete, já que a velocidade de descida é constante, no intervalo de $t = [35; 156]$, podendo ser observado na Figura 4.9.

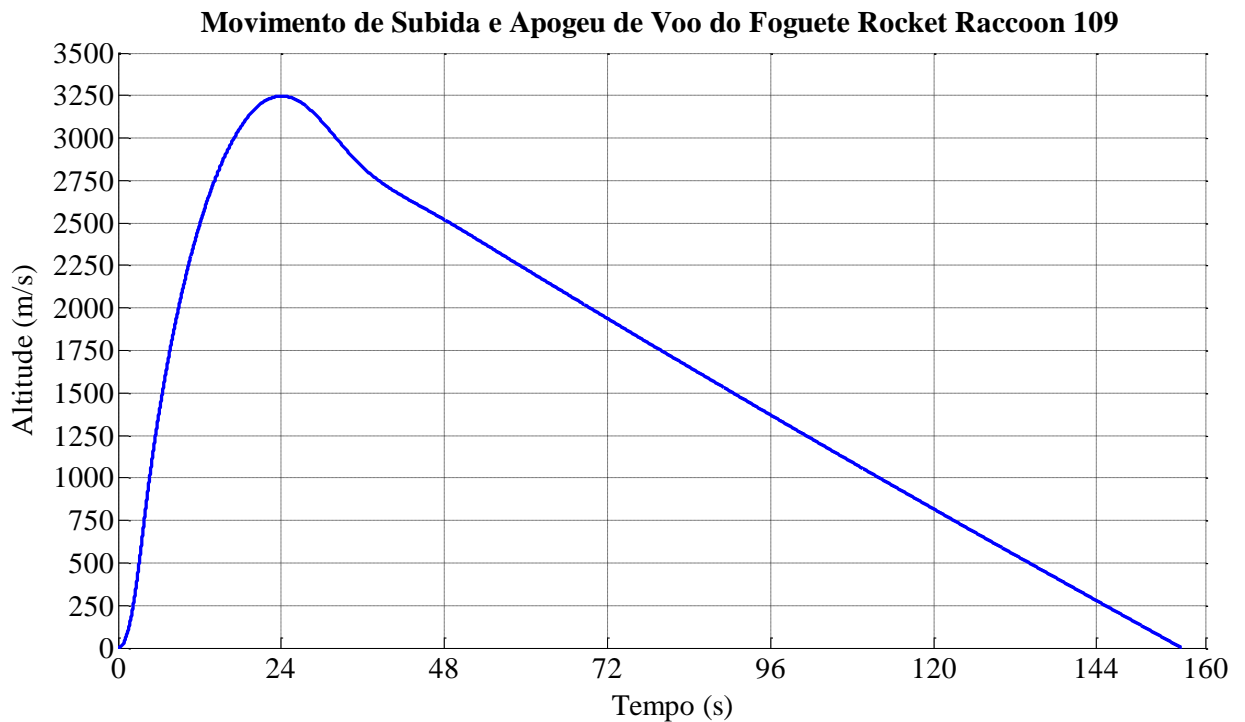


Figura 4.9 – Trajetória e apogeu de voo do foguete.

A inter-relação entre as curvas da Figura 4.8 e 4.9 pode ser melhor observada na Figura 4.10, que mostra o comportamento da velocidade durante a trajetória de subida e descida do foguete. Quando o propelente para de queimar e conseqüentemente o empuxo cessa, o foguete, por quantidade de movimento continua a subir, porém sua velocidade passa a sofrer desaceleração, pela gravidade, e seu valor reduz em, módulo, até tornar-se nulo. Neste momento o veículo encontra-se no apogeu e inicia sua trajetória de descida até que um paraquedas é disparado com a finalidade de trazer o foguete em segurança para o solo, mantendo a velocidade baixa e constante.

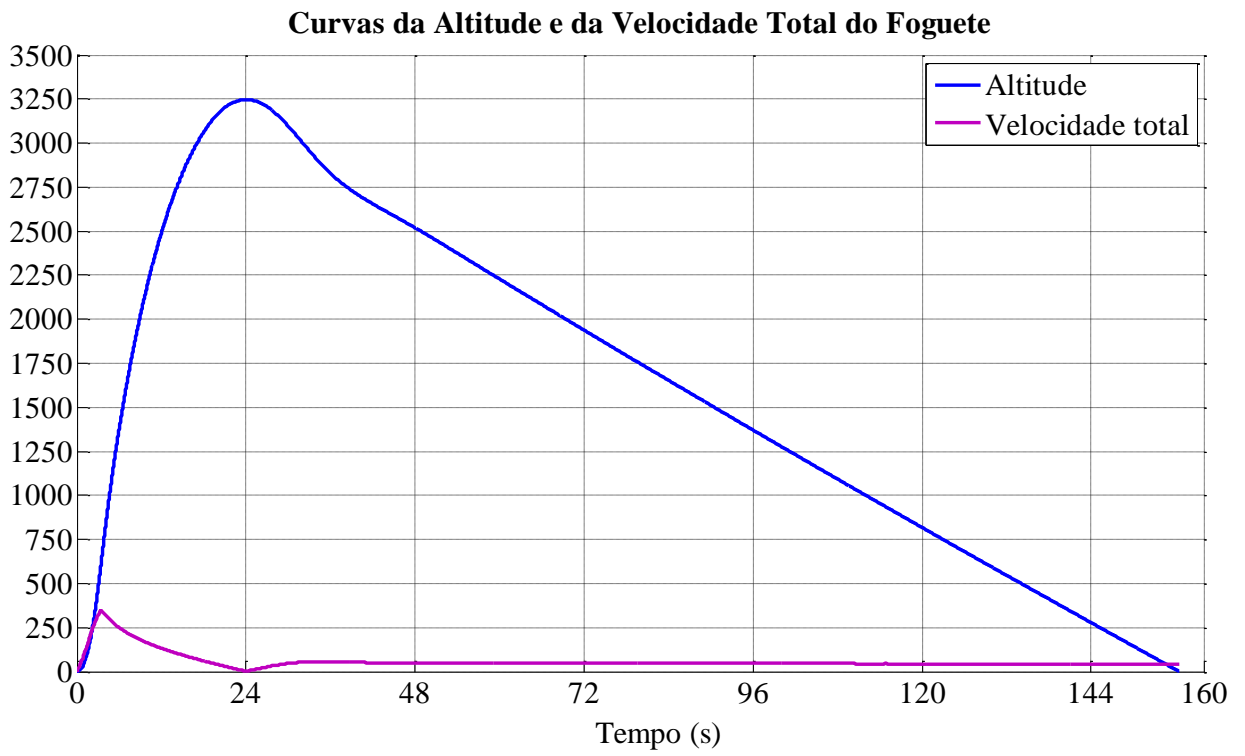


Figura 4.10 – Relação entre as curvas da altitude e da velocidade total do foguete.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho de iniciação científica apresentou uma revisão histórica sobre foguetes, as modelagens das forças e momentos atuantes no corpo com o intuito de descrever a dinâmica translacional e rotacional do corpo. Por tratar-se de um sistema com seis graus de liberdade e complexo, muitas considerações foram realizadas de modo que o resultado final, coletado por meio das simulações computacionais não fosse grosseiramente distante dos resultados de um modelo real.

O modelo estrutural foi desenvolvido num *software* de projetos existente, chamado AeroLAB, capaz de gerar os parâmetros aerodinâmicos de voo baseado em dados como formato aerodinâmico da aleta, geometria da coifa e do corpo, informações estas geradas por meio dos desenhos realizados no mesmo *software*.

Foram simulados:

- Os coeficientes de pressão de arrasto de diferentes formatos geométricos de coifa;
- O coeficiente de pressão de arrasto da coifa $1/2$ de *power*;
- Comparação entre as pressões de arrasto da coifa de $1/2$ de *power* e da gerada pela descontinuidade abrupta de formato na base da mesma;
- Coeficientes de arrasto da aleta gerados pelo atrito e pela pressão de arrasto;
- Coeficiente de arrasto do foguete;
- A curva de empuxo;
- Curva da velocidade vertical do foguete;
- Curva da velocidade total do foguete;
- Trajetória e apogeu de voo do foguete;

- Relação entre as curvas da altitude e da velocidade total do foguete.

Concluiu-se que apesar de tratar-se de uma modelagem complexa, considerações podem ser realizadas de modo a facilitar as manipulações algébricas matemáticas e computacionais, na busca de parâmetros simulados de voo.

Apesar de se tratar de um trabalho teórico, a possibilidade de construção física de uma estrutura real, para ensaios, apresentou-se factível de acordo com os resultados obtidos nas simulações.

Como ideias futuras podem ser realizadas:

- A modelagem e simulação utilizando CFD para a obtenção dos dados aerodinâmicos de voo;
- Um *software* próprio utilizando MATLAB® capaz de integrar as equações do movimento, gerando as curvas de atitude e estabilidade de voo;
- A construção e de uma bancada de testes estáticos para a medição real da força de empuxo gerada pelo motor;
- A construção física das partes e os ensaios de resistência mecânica das mesmas;
- A criação de requisitos de desenvolvimento e operação com o intuito de verificar e validar o modelo, reduzindo a propensão de falhas de funcionamento e garantindo a segurança de operação e lançamento para que atenda às necessidades dos grupos que estudam raios trigados;
- A construção física do foguete *Rocket Raccoon* 109 e o seu possível lançamento de teste.

6 REFERÊNCIAS

A SEGUNDA GUERRA MUNDIAL. Bombas Voadoras Sobre Inglaterra!, Rio de Janeiro, v. 85, 1966.

ALWAY, P. **Rockets of the world**. [S.l.]: Saturn Press, 1995.

ARNDT, R. Opel Rocket Vehicles. **Opel Rocket Vehicles (1928-1929)**. Disponível em: <<http://strangevehicles.greyfalcon.us/OPEL%20ROCKET%20VEHICLES.htm>>. Acesso em: 18 janeiro 2013.

BANDEIRANTE. TECNOLOGIA AEROESPACIAL PARA A EDUCAÇÃO, 2010. Disponível em: <<http://www.boavistamodelismo.com.br/imagens/foguetes/bvm/vs40.jpg>>. Acesso em: 06 setembro 2013.

BARRY, B. Rocket Vehicles. **General Description of Rocket Vehicles**, 5 dezembro 2012. Disponível em: <<http://www.hq.nasa.gov/pao/History/conghand/vehicles.htm>>. Acesso em: 18 janeiro 2013.

BLACK, M. D. The Evolution of Rocket technology. [S.l.]: Native Planter, 2012. p. 109-112 e 114-119.

BONSOR, K. HowStuffWorks. **Como funcionam os assentos ejetáveis**, 09 setembro 2008. Disponível em: <<http://ciencia.hsw.uol.com.br/assentos-ejetaveis4.htm>>. Acesso em: 21 janeiro 2013.

BRYS, L. M. Página Dinâmica para Aprendizado do Sensoriamento Remoto. **Transformação entre Referenciais Geodésicos**, abril 2008. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/engcart/Teste/refer_exp.html>. Acesso em: 02 março 2013.

BUTRICA, A. J. **"Voyager: The Grand Tour of Big Science"**. [S.l.]: From Engineering Science To Big Science, 1998. ISBN 978-0-16-049640-0.

CANRIGHT, S. Student Features. **NASA's Great Observatories**, 13 abril 2009. Disponível em:

<http://www.nasa.gov/audience/forstudents/postsecondary/features/F_NASA_Great_Observatories_PS.html>. Acesso em: 18 janeiro 2013.

CANRIGHT, S. Rocketry. **Hermann Oberth**, 22 setembro 2010. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/audience/foreducators/rocketry/home/hermann-oberth.html>>. Acesso em: 11 dezembro 2012.

CANRIGHT, S. Rocketry. **Konstantin E. Tsiolkovsky**, 22 setembro 2012. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/audience/foreducators/rocketry/home/konstantin-tsiolkovsky.html>>. Acesso em: 10 dezembro 2012.

CHERTOK, B. **Rockets and People - Creating a Rocket Industry**. Washington, DC: NASA, 2006.

CONWAY, E. The Beginning of U.S. Space Exploration. **Explorer I**, 31 janeiro 2003. Disponível em: <<http://www.jpl.nasa.gov/explorer/history/>>. Acesso em: 11 dezembro 2012.

CORNELISSE, J. W.; SCHÖYER, H. F. R.; WAKKER, K. F. **Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics**. Califórnia: Northern Ireland at the Universities, 1979.

CORRÊA, F. G. **O Projeto do Submarino Nuclear Brasileiro. Uma História de Ciência, Tecnologia e Soberania**. [S.l.]: Capax Dei, 2010.

DA SILVEIRA, E. Problemas Brasileiros - Missão é colocar o Brasil em órbita, São Paulo, v. 414, 2012. ISSN 0101-4269. Disponível em: <<http://www.iae.cta.br/?action=noticia&id=219>>. Acesso em: 18 março 2013.

DAVIS, P. Solar System Exploration. **Galileo Legacy Site**, 28 junho 2010. Disponível em: <<http://solarsystem.nasa.gov/galileo/>>. Acesso em: 3 novembro 2012.

DRYDEN, H. L. **Results of The First U.S. Manned Suborbital Space Flight**. Springfield. 1961.

EINSTEIN, A. et al. **The Principle of Relativity**: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. New York: Courier Dover Publications, 1952. ISBN 0486600815.

ENCYCLOPEDIA ASTRONAUTICA. Ilyushin. **Encyclopedia Astronautica**, 2012. Disponível em: <<http://www.astronautix.com/astros/ilyushin.htm>>. Acesso em: 3 novembro 2012.

ETKIN, B.; REID, L. D. **Dynamics of Flight Stability and Control**. Canadá: John Wiley & Sons, 1995.

FAB. Programa Espacial Brasileiro, 2006. Disponível em: <http://freepages.military.rootsweb.ancestry.com/~otranto/fab/programa_espacial.htm>. Acesso em: 26 novembro 2013.

GARBER, S. Sputnik and The Dawn of the Space Age. **Sputnik: The Fiftieth Anniversary**, 10 outubro 2007. Disponível em: <<http://history.nasa.gov/sputnik/>>. Acesso em: 04 novembro 2012.

GARBER, S. 40th Anniversary of the Mercury 7. **Alan B. Shepard, Jr.**, 2009. Disponível em: <<http://history.nasa.gov/40thmerc7/intro.htm>>. Acesso em: 12 janeiro 2013.

GARCIA, M. Orion, 2013. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/exploration/systems/mpcv/#.UpiuLNJDuHg>>. Acesso em: 2013.

GOLDSTEIN, H.; SAFKO, J. L.; POOLE JR, C. P. **Classical Mechanics**. [S.l.]: Addison-Wesley, 2001. ISBN 0201657023.

GOUVEIA, A. **Esboço Histórico da Pesquisa Espacial no Brasil**. São José dos Campos: INPE, 2003.

GREEN, W. **Warplanes of the Third Reich**. [S.l.]: Doubleday & Company, 1970.

GREENSITE, A. L. **Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems**. New York: Spartan Books, v. II, 1970.

HAMILTON, C. J. Views of the Solar System. **Uma Breve História dos Foguetes**, 1999. Disponível em: <<http://www.solarviews.com/portug/rocket.htm>>. Acesso em: 10 dezembro 2012.

HICKAM JR, H. H. **Rocket Boys - A Memoir**. [S.l.]: Delta Publishing, 2000. ISBN 9780385333214. Disponível em: <<http://www.homerhickam.com/about/bio.shtml>>. Acesso em: 24 janeiro 2013.

HILL, P.; PETERSON, C. **Mechanics and Thermodynamics of Propulsion**. Massachusetts: Prentice Hall, 1992. ISBN 0-201-14659-2.

HUZEL, D. K.; BRAUN, W. V. **Peenemünde to Canaveral**. Westport: Greenwood Press, 1981. ISBN 0313229287.

IAE. Motor L75, 2013. Disponível em: <<http://www.iae.cta.br/?action=l75>>. Acesso em: 6 setembro 2013.

III BAKER, A. D. **Combat Fleets of the World, 1998-1999: Their Ships, Aircraft and Systems**. Annapolis: US Naval Institute Press, 2000. ISBN 978-1-55750-197-4.

INCOSE. INCOSE - International Council on Systems Engineering, 2013. Disponível em: <<http://www.incose.org/>>. Acesso em: 22 agosto 2013.

INOVAÇÃO TECNOLÓGICA. Inovação Tecnológica. **NASA testa nave de escape de astronautas**, 08 setembro 2009. Disponível em: <<http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=nasa-testa-nave-escape-astronautas&id=010130090708>>. Acesso em: 23 janeiro 2013.

INPE. CBERS. **INPE**, 2011. Disponível em: <<http://www.cbbers.inpe.br/>>. Acesso em: 23 janeiro 2013.

ISHIGURO, Y.; GUIMARÃES, L. **Energia Nuclear para Missões Espaciais**. São José dos Campos. 2007.

JENKINS, D. R. **Space Shuttle: The History of the National Space Transportation System**. [S.l.]: Voyageur, 2002. ISBN 0-9633974-5-1.

JENNER, L. The Hubble Story, 2009. Disponível em: <http://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/story/the_story.html>. Acesso em: 2013.

JENNER, L. NASA. **Goddard Space Flight Center**, 10 outubro 2012. Disponível em: <http://www.nasa.gov/centers/goddard/about/history/dr_goddard.html>. Acesso em: 10 dezembro 2012.

JPL - NASA. Mars Science Laboratory. **Curiosity Rover**, Colorado, 2012. Disponível em: <<http://mars.jpl.nasa.gov/msl/>>. Acesso em: 31 agosto 2012.

KAY, A. L.; CREEK, E. J. **German Aircraft of the Second World War**. [S.l.]: Putnam Publishing Group, 1972.

KOROLEV, S. P. Rocket R-7 , 2013. Disponível em: <<http://www.energia.ru/english/energia/launchers/rocket-r7.html>>. Acesso em: 2013.

KUMPEL, A. et al. A Conceptual Design for the Space Launch Capability of the Peacekeeper ICBM. **American Institute of Aeronautics and Astronautics - AIAA**, Los Angeles, n. 9th, 2002.

LEITE FILHO, W. C. **Dinâmica de Voo (notas de aula)**. São José dos Campos: IAE, 2011.

LEY, W.; CLARKE, A. C. **Rockets, Missiles and Men in Space**. New York: Signet, 1969. ISBN 9780451388919.

LONG, A. A. **Primórdios da Filosofia Grega**. [S.l.]: Idéias & Letras, 2008.

MAHLER, W. F. C. **Estudo de Manobras Orbitais Utilizando Algoritmo Genético**. São José dos Campos. 2012.

MAHLER, W. F. C. **Projeto de Foguetes para Lançamento de Nano Satélites**. São José dos Campos. 2013.

MALYSHEV, V. V. et al. **Aerospace vehicle control - modern theory and applications**. São José dos Campos: Instituto de Aeronáutica e Espaço, 1996.

MARCONI, E. M. What is a Sounding Rocket? **NASA**, 22 novembro 2007. Disponível em: <http://www.nasa.gov/missions/research/f_sounding.html>. Acesso em: 22 janeiro 2013.

MARTIN, J. L. T. **Rocket and Spacecraft Propulsion Principles, Practice and New Developments**. Chichester: Springer, 2009.

MEIROVITCH, L. **Analytical Dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970. ISBN 0486432394.

MILLER, R. **The History of Rockets**. [S.l.]: Franklin Watts, 1999.

MIT. Aeronautics and Astronautics, 2013. Disponível em: <<http://ocw.mit.edu/courses/#aeronautics-and-astronautics>>. Acesso em: 2013.

NAKKA, R. Richard Nakka's Experimental Rocketry, 11 agosto 2012. Disponível em: <<http://www.nakka-rocketry.net/>>. Acesso em: 18 janeiro 2013.

NAKKA, R. Richard Nakka's Experimental Rocketry Web Site. **Amateur Experimental Rocketry**, 11 maio 2013. Disponível em: <<http://www.nakka-rocketry.net/>>. Acesso em: 17 junho 2013.

NASA. **Space Tug Avionics Definition Study**. San Diego: [s.n.], 1975.

NASA. Phoenix Mars Mission, 2010. Disponível em: <<http://phoenix.lpl.arizona.edu/index.php>>. Acesso em: 11 setembro 2012.

NEUFELD, M. J. **Von Braun: dreamer of space, engineer of war**. New York: A.A. Knopf, 2007. ISBN 0-307-26292-8.

OCTOBER Sky. Direção: J. JOHNSTON. [S.l.]: Universal Pictures. 1999.

OXFORD UNIVERSITY. Oxford Dictionaries. **Rocket**, 2013. Disponível em: <<http://oxforddictionaries.com/definition/english/rocket>>. Acesso em: 21 janeiro 2013.

POLMAR, N.; MOORE, K. J. **Cold War Submarines: The Design and Construction of U.S. and Soviet Submarines, 1945-2001**. Washington: Potomac Books, 2004. ISBN 978-1-57488-594-1.

PRATT & WHITNEY. УГОЛОК НЕБА, 2010. Disponível em: <<http://www.airwar.ru/enc/engines/f100-229.html>>. Acesso em: 06 setembro 2013.

RAMAMURTHI, K. **Mechanical Engineering - Rocket Propulsion**, 2012. Disponível em: <<http://nptel.iitm.ac.in/courses/112106073/>>. Acesso em: 2012.

REISIG, G. **Raketenforschung in Deutschland**. Münster: Wissenschaft & Technik, 1997. ISBN 3-89019-500-8.

RIPER, A. B. V. **Rockets and Missiles - The LifeE Story of a Technology**. Westport: Greenwood technographies, 2004. ISBN 0-313-32795-5.

ROSKAN, J. **Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls**. [S.l.]: Darcorporation, 2001. ISBN 1-884885-17-9.

SÁNCHEZ, F.; APARICIO, A.; PILLET, M. **Payload and Mission Definition in Space Sciences**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

SEIBERT, G. ESA. **The History of Sounding Rockets and Their Contribution to European Space Research**, novembro 2006. Disponível em: <http://www.esa.int/esapub/hsr/HSR_38.pdf>. Acesso em: 12 novembro 2012.

SHEARER, D. A.; VOGT, G. L. **Foguetes - Manual do Professor com Atividades de Ciências, Matemática e Tecnologia/NASA; Traduzido pela Universidade do Paraíba**. São José dos Campos: UNIVAP, 2001.

SHEARER, D. A.; VOGT, G. L. **Rockets - An Educator's Guide with Activities In Science, Mathematics, and Technology**. Washington, DC: NASA, 2003.

SIDDIQI, A. A. **The Red Rockets' Glare Spaceflight and the Russian Imagination, 1857-1957**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0-521-89760-2.

SIDDIQI, A. A. Korolev, Sputnik, and The International Geophysical Year. Disponível em: <<http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/sputnik/siddiqi.html>>. Acesso em: 04 novembro 2012.

SPIKE. **Aggregate (3D-comparison)**, 2007. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Aggregate_\(3D-comparison\).jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Aggregate_(3D-comparison).jpg)>. Acesso em: 22 agosto 2013.

STUMPF, D. K. **Titan II: A History of a Cold War Missile Program**. Arkansas: University of Arkansas Press, 2000. ISBN 1-55728-601-9.

SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. **Rocket Propulsion Elements**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-32642-9.

SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. **Rocket Propulsion Elements**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-32642-9.

TARG, S. **Curso Breve de Mecânica Teórica**. [S.I.]: Mir, 1976. ISBN 5396003812.

THE Cosmonaut Cover-Up. Direção: E. HAIMOFF. [S.I.]: Global Science Productions. 1999.

THE INDEPENDENT TEAM. World's military powers. **The Independent**, 10 setembro 2008. Disponível em: <<http://www.independent.co.uk/index.php/reports/world-report/74-world-report-/172-worlds-military-powers>>. Acesso em: 23 janeiro 2013.

THE ROCKETMAN. History. **Powerhouse Bio**, 2010. ISSN 214.390.3575. Disponível em: <<http://www.rocketman.tv/history.php>>. Acesso em: 18 janeiro 2013.

THE UNWANTED BLOG. Space Launch System, 2012. Disponível em: <<http://up-ship.com/blog/?p=13741>>. Acesso em: 22 agosto 2013.

THOMSON, L. M. M. **Theoretical Hydrodynamics**. [S.I.]: The Macmillan And Company, 1962.

VERBEEK, J. R. **"V2-Vergeltung" from The Hague and Its Environs: Deployment of the V2 Rockets and the Terrors for the City and Her Inhabitants**. [S.I.]: V2Platform Foundation, 2005.

WANG, N. F.; FENG, W. **Theoretical and Experimental Research on the Throat to Port Area. Xi'an**. [S.I.]: Xi'an Modern Chemistry Research Institute, 1999.

WIE, B. **Space vehicle dynamics and control**. Reston: AIAA Education Series, 1998.

WILEY, J. L.; SARAFIN, T. P. **Spacecraft Structures and Mechanisms: From Concept to Launch**. New York: Springer, 2007.

WILSON, J. Skylab. **America's First Space Station**, 1 dezembro 2009. Disponível em: <http://www.nasa.gov/mission_pages/skylab/index.html>. Acesso em: 16 janeiro 2013.

WILSON, J. Neil Armstrong: 1930-2012. **NASA**, 11 setembro 2012. Disponível em: <http://www.nasa.gov/topics/people/features/armstrong_obit.html>. Acesso em: 3 novembro 2012.

WRIGHT, J. Russian Soyuz TMA Spacecraft Details, 2013. Disponível em: <http://www.nasa.gov/mission_pages/station/structure/elements/soyuz/spacecraft_detail.html#.UpitYNJDuHg>. Acesso em: 2013.

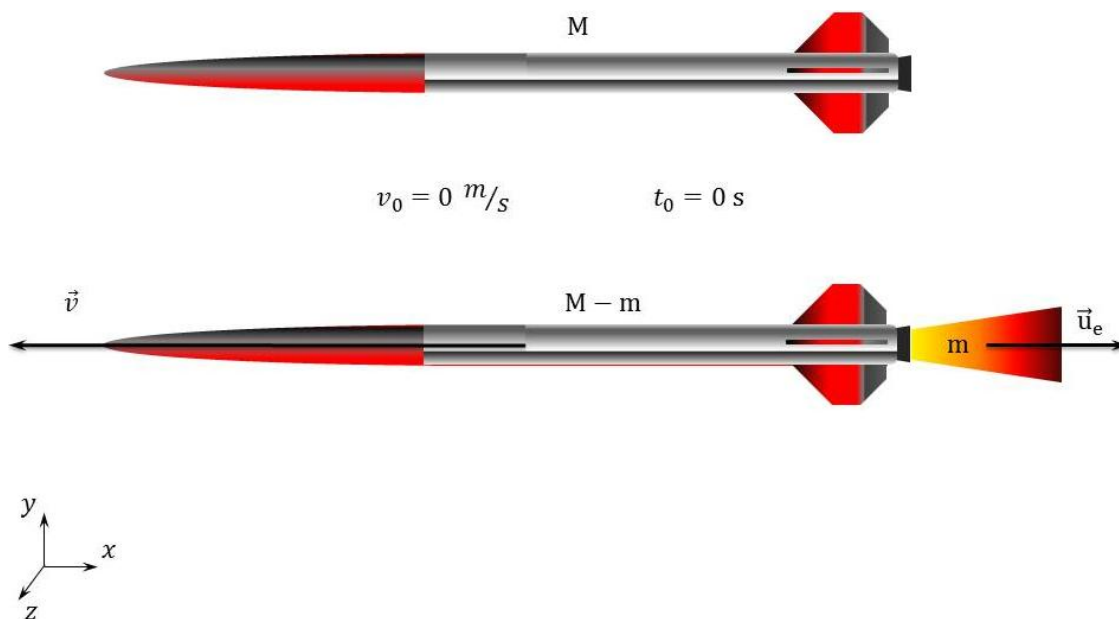
YU, M. H.; LI, J. C. **Miscellaneous Issues: Ancient Structures, Propellant of Solid Rocket, Parts of Rocket and Generator**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012.

YURI Gagarin Conspiracy: Fallen Idol. Direção: S. OLDHAM e D. HOOTEN. [S.l.]: Indican Pictures. 2009.

ANEXO I

A visualização do problema físico de um foguete perdendo uma quantidade constante de massa durante a queima e a manipulação matemática do mesmo pode ser realizada de acordo com a seguinte situação:

Um foguete de massa total M , como velocidade inicial nula (v_0), ignita seu propelente, cujo qual expelirá uma quantidade de massa m com velocidade de escape constante u_e e contrária a velocidade v que o veículo adquirirá.



Pela quantidade de movimento as seguintes equações podem ser descritas:

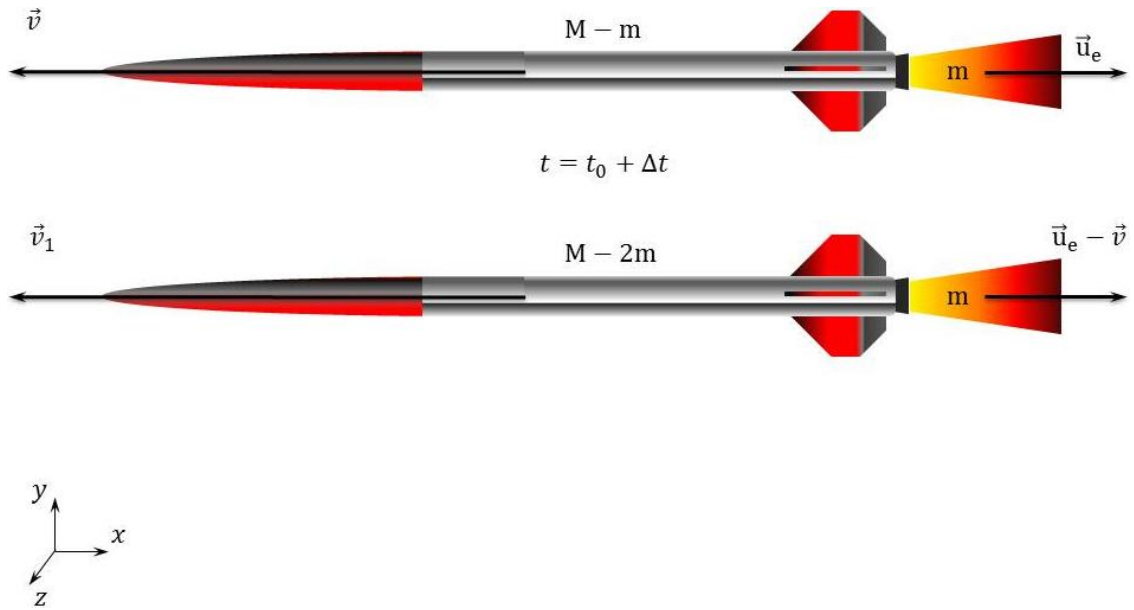
$$\vec{v}(M - m) - \vec{u}_e m = 0 \quad (4.2)$$

$$|\vec{v}| = \frac{m}{M - m} |\vec{u}_e| \quad (4.3)$$

A velocidade de escape dos gases u_e é descrita pela seguinte equação:

$$u_e = I_s g = \frac{F_E}{\dot{m}} \quad (4.4)$$

A Equação (1.2) apresenta a velocidade do foguete após a ignição do propelente. Passado um intervalo de tempo Δt outra porção de massa, igual à primeira, é queimada atribuindo novos valores para a velocidade de escape dos gases e conseqüentemente para a velocidade do foguete.



A velocidade do foguete pode ser calculada, novamente, pelo princípio da quantidade de movimento:

$$\vec{v}_1(M-2m) - (\vec{u}_e - \vec{v})m = (M-m)\vec{v} \quad (4.5)$$

$$\vec{v}_1(M-2m) - \vec{u}_e m + \vec{v}m = (M-m)\vec{v} \quad (4.6)$$

$$\vec{v}_1(M-2m) - \vec{u}_e m = (M-m)\vec{v} - \vec{v}m \quad (4.7)$$

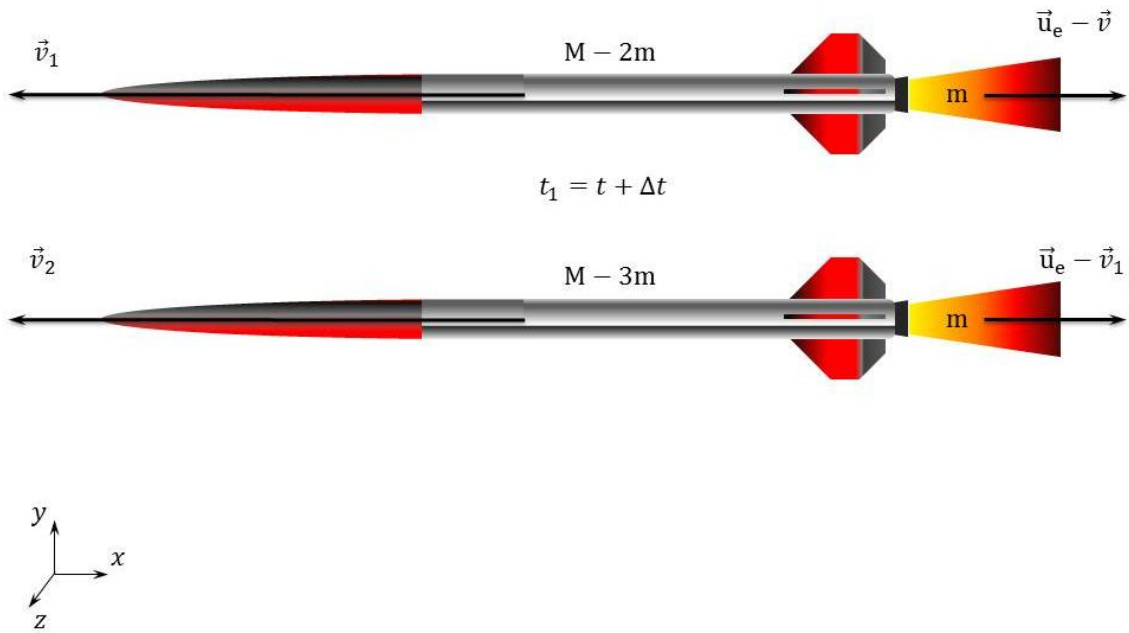
$$\vec{v}_1 = \frac{(M-2m)\vec{v}}{(M-2m)} + \frac{\vec{u}_e m}{(M-2m)} \quad (4.8)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \frac{\vec{u}_e m}{(M-2m)} \quad (4.9)$$

Substituindo a Equação (1.2) em (1.8) e reorganizando os termos chega-se ao valor da nova velocidade do foguete:

$$|\vec{v}_1| = m \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} \right) |\vec{u}_e| \quad (4.10)$$

$$|\vec{v}_1| = m |\vec{u}_e| \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{M-im} \right) \quad (4.11)$$



Pela quantidade de movimento pode-se escrever:

$$\vec{v}_2 (M - 3m) - (\vec{u}_e - \vec{v}_1) m = (M - 2m) \vec{v}_1 \quad (4.12)$$

$$\vec{v}_2 (M - 3m) - \vec{u}_e m + \vec{v}_1 m = (M - 2m) \vec{v}_1 \quad (4.13)$$

$$\vec{v}_2 (M - 3m) - \vec{u}_e m = (M - 2m) \vec{v}_1 - \vec{v}_1 m \quad (4.14)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{(M - 3m) \vec{v}_1}{(M - 3m)} + \frac{\vec{u}_e m}{(M - 3m)} \quad (4.15)$$

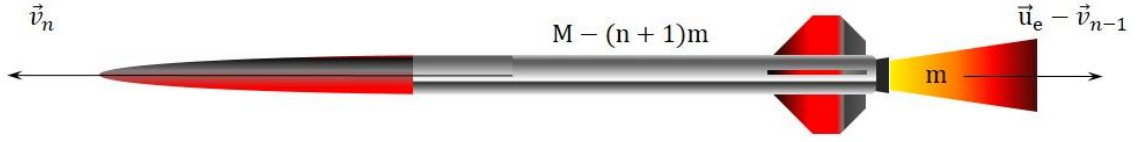
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{\vec{u}_e m}{(M - 3m)} \quad (4.16)$$

Substituindo a Equação (1.9) em (1.15) e reorganizando os termos chega-se ao valor da nova velocidade do foguete:

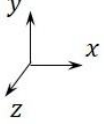
$$|\vec{v}_2| = m \left(\frac{1}{M - m} + \frac{1}{M - 2m} + \frac{1}{M - 3m} \right) |\vec{u}_e| \quad (4.17)$$

$$|\vec{v}_1| = m |\vec{u}_e| \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{M - im} \right) \quad (4.18)$$

À medida que o propelente é queimado o foguete é acelerado, ou seja, sua velocidade aumenta. Se a última parcela de massa de propelente for queimada no instante de tempo $t_n = n - 1$ a velocidade máxima poderá ser calculada da seguinte forma:



$$t_1 = t_{n-1} + \Delta t = n - 1$$



Pela quantidade de movimento pode-se escrever:

$$\vec{v}_n [M - (n+1)m] - (\vec{u}_e - \vec{v}_{n-1})m = [M - (n)m] \vec{v}_{n-1} \quad (4.19)$$

$$\vec{v}_n [M - (n+1)m] - \vec{u}_e m + \vec{v}_{n-1} m = [M - (n)m] \vec{v}_{n-1} \quad (4.20)$$

$$\vec{v}_n [M - (n+1)m] - \vec{u}_e m = [M - (n)m] \vec{v}_{n-1} - \vec{v}_{n-1} m \quad (4.21)$$

$$\vec{v}_n = \frac{[M - (n+1)m] \vec{v}_{n-1}}{[M - (n+1)m]} + \frac{\vec{u}_e m}{[M - (n+1)m]} \quad (4.22)$$

$$\vec{v}_n = \vec{v}_{n-1} + \frac{\vec{u}_e m}{[M - (n+1)m]} \quad (4.23)$$

Sabendo que por analogia as velocidades anteriores:

$$|\vec{v}_{n-1}| = m \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} + \frac{1}{M-3m} + \dots + \frac{1}{M-(n)m} \right) |\vec{u}_e| \quad (4.24)$$

Logo:

$$\vec{v}_n = m \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} + \frac{1}{M-3m} + \dots + \frac{1}{M-(n)m} \right) \vec{u}_e + \frac{\vec{u}_e m}{[M - (n+1)m]} \quad (4.25)$$

$$\vec{v}_n = m \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} + \frac{1}{M-3m} + \dots + \frac{1}{M-(n)m} + \frac{1}{[M - (n+1)m]} \right) \vec{u}_e \quad (4.26)$$

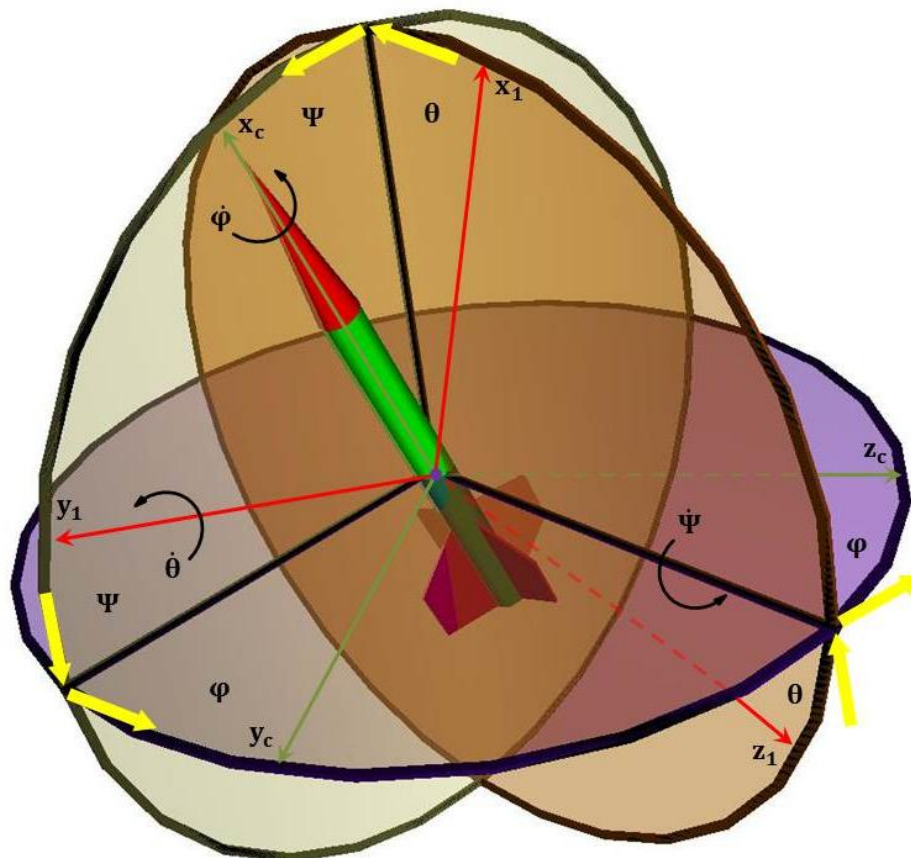
$$|\vec{v}_n| = m |\vec{u}_e| \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{M-im} \right) \quad (4.27)$$

c.q.d.

ANEXO II

A dedução das equações cinemáticas é feita utilizando os ângulos de Euler, ψ (guinada),

θ (arfagem) e ϕ (rolamento), que definem a orientação (atitude) do foguete relativa ao sistema do corpo.



Se E_1 , E_c , e E_r são matrizes de versores do sistema inercial, do corpo e de uma orientação intermediária, respectivamente, tem-se:

$$E_1 = \begin{bmatrix} i_1 \\ j_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$E_c = \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$E_r = \begin{bmatrix} i_r \\ j_r \\ k_r \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

O vetor velocidade pode ser representado da seguinte forma:

$$\vec{\Omega} = \frac{d}{dt}(\varphi)i_c + \frac{d}{dt}(\theta)j_1 + \frac{d}{dt}(\psi)k_r \quad (4.31)$$

Para que a velocidade angular tenha todas as suas coordenadas no sistema do corpo, tem-se:

$$E_r = R_x(\varphi)E_c \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} i_r \\ j_r \\ k_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ 0 & \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$k_r = \text{sen} \varphi j_c + \cos \varphi k_c \quad (4.34)$$

Sendo assim, a matriz de rotação que transforma as coordenadas do sistema inercial para as coordenadas do sistema do corpo será:

$$E_1 = R_y(\theta)R_z(\psi)R_x(\varphi)E_c \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen} \psi & 0 \\ \text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ 0 & \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$j_1 = \text{sen} \psi i_c + \cos \varphi \cos \psi j_c - \text{sen} \varphi \cos \psi k_c \quad (4.37)$$

Sabendo que a velocidade angular pode ser descrita por suas componentes da seguinte forma:

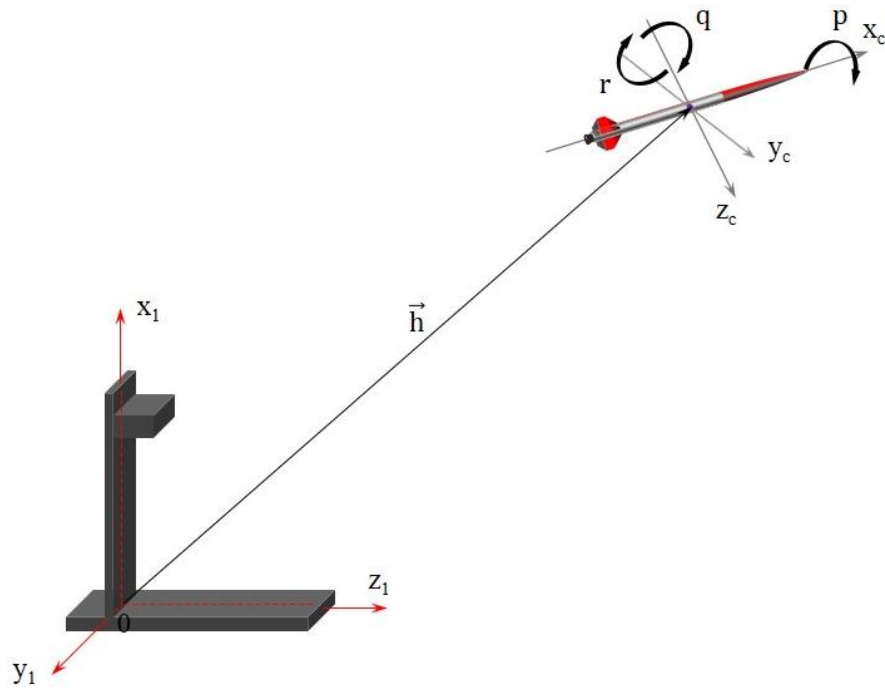
$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Sendo assim:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}(\varphi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen} \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}(\psi) \begin{bmatrix} \text{sen} \psi \\ \cos \varphi \cos \psi \\ -\text{sen} \varphi \cos \psi \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

c.q.d.

ANEXO III



O vetor posição do foguete é definido por \vec{h} , onde é:

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Considerando os seis graus e liberdade do movimento do foguete, sendo três respectivos a translação e três a rotação. Assim sendo define-se a velocidade angular como:

$$\vec{\Omega}_c^T = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

A velocidade do foguete relativa ao referencial inercial:

$$\frac{d}{dt}(\vec{h}) = \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right) \quad (4.42)$$

Derivando no tempo a Equação (1.3), determina-se a aceleração do foguete:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} (\vec{h}) \right] = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \right\} \quad (4.43)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{h}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

O diferencial versorial pode ser escrito da seguinte forma (equação de Poisson):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} (i_c) + \frac{d}{dt} (j_c) + \frac{d}{dt} (k_c) = \vec{\Omega}_c^T \times i_c + \vec{\Omega}_c^T \times j_c + \vec{\Omega}_c^T \times k_c = \vec{\Omega}_c^T \times \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Substituindo a Equação (1.2) em (1.6):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Substituindo a Equação (1.7) em (1.5) e rearranjando os termos, tem-se:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{h}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \left\{ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \right\} \quad (4.47)$$

Na Equação apareceram alguns termos interessantes e se observados veremos que são:

$$\begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \vec{v}_c = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{pmatrix} = \frac{\delta^2}{\delta t^2} (\vec{h}) \quad (4.49)$$

A Equação (1.9) apresenta a velocidade do foguete relativa ao referencial inercial e a Equação (1.10) a variação temporal da velocidade relativa do foguete, sendo esta uma aceleração fictícia que surge em casos de movimentos relativos entre corpos e é mais conhecida por aceleração de Einstein.

Substituindo a Equação (1.9) e (1.10) em (1.8):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{h}) = \frac{\delta^2}{\delta t^2}(\vec{h}) + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (4.50)$$

Mas:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right) \right\} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right\} \quad (4.51)$$

Substituindo a Equação (1.7) em (1.12):

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right) = \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right) \quad (4.52)$$

Mas:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} = \vec{h} \quad (4.53)$$

Desta forma:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_c \\ j_c \\ k_c \end{bmatrix} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_c^T) \times \vec{h} + \vec{\Omega}_c^T \times (\vec{\Omega}_c^T \times \vec{h}) \quad (4.54)$$

Substituindo a Equação (1.15) em (1.11) e reescrevendo-a, tem-se:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{h}) = \frac{\delta^2}{\delta t^2}(\vec{h}) + 2(\vec{\Omega}_c^T \times \vec{v}_c^T) + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_c^T) \times \vec{h} + \vec{\Omega}_c^T \times (\vec{\Omega}_c^T \times \vec{h}) \quad (4.55)$$

A variação temporal da quantidade de movimento de um foguete que expela pela queima uma quantidade constante de gases, ou seja, um sistema de massa variável pode ser descrita como:

$$\frac{d}{dt}(M \cdot \vec{v}_c^T) = \frac{d}{dt} M \cdot \vec{v}_c^T + M \frac{d}{dt} \vec{v}_c^T \quad (4.56)$$

Mas:

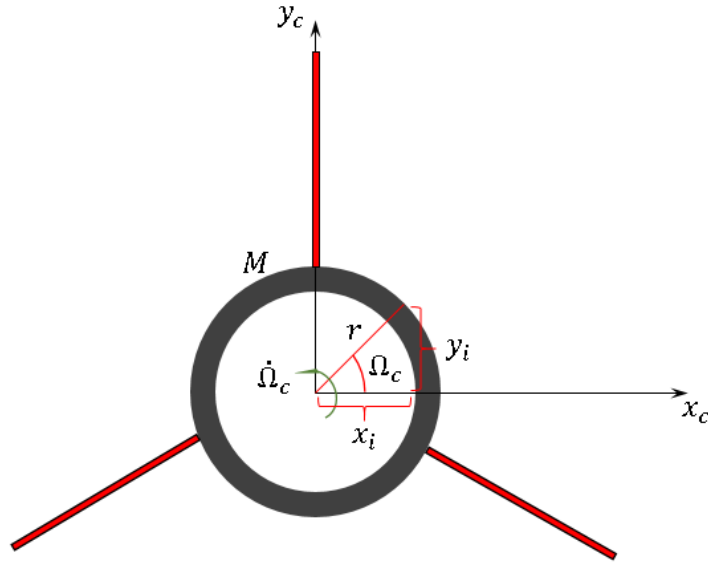
$$\frac{d}{dt} M \cdot \vec{v}_c^T = \vec{F}_E \quad (4.57)$$

Escrevendo o diferencial da Equação (1.16) com base na variável velocidade e substituindo (1.16) e (1.18) em (1.17), tem-se:

$$\frac{d}{dt} (M \cdot \vec{v}_c^T) = \vec{F}_E + M \frac{\delta}{\delta t} (\vec{v}_c^T) + 2M (\vec{\Omega}_c^T \times \vec{v}_c^T) + M \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_c^T) \times \vec{h} + M \vec{\Omega}_c^T \times (\vec{\Omega}_c^T \times \vec{h}) \quad (4.58)$$

c.q.d.

ANEXO IV



O vetor r é representado da seguinte forma:

$$\vec{r} = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} \quad (4.59)$$

O módulo de r é calculado da seguinte forma:

$$r = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} \quad (4.60)$$

mas:

$$x_i = r \cos(\Omega_c) \quad (4.61)$$

$$y_i = r \text{sen}(\Omega_c) \quad (4.62)$$

Derivando os termos acima, tem-se:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos(\Omega_c) - r \text{sen}(\Omega_c) \frac{d\Omega_c}{dt} = -r \text{sen}(\Omega_c) \frac{d\Omega_c}{dt} \quad (4.63)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dr}{dt} \text{sen}(\Omega_c) + r \cos(\Omega_c) \frac{d\Omega_c}{dt} = r \cos(\Omega_c) \frac{d\Omega_c}{dt} \quad (4.64)$$

Rearranjando os termos:

$$-r \text{sen}(\Omega_c) \frac{d\Omega_c}{dt} = -\frac{d\Omega_c}{dt} \quad (4.65)$$

A energia cinética do corpo:

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 = \frac{1}{2} M \dot{\Omega}_c^2 (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} I \dot{\Omega}_c^2 \quad (4.66)$$

O momento angular do corpo:

$$\vec{L} = M_c r^2 \vec{\Omega}_c = \vec{I} \vec{\Omega}_c \quad (4.67)$$

Se o corpo gira:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{I} \vec{\Omega}_c)}{dt} \quad (4.68)$$

c.q.d.